

非数学者である中学生における オイラーの等式の美しさについて

抄 録

先行研究では、オイラーの等式と呼ばれる数式が数学者の多くにとって美しさを感じているということが分かったが、私は中学生においても同じようなことが言えるのか疑問に思った。そこで、本研究では、中学生を対象にオイラーの等式を美しいと感じるかについてアンケート調査を行い、オイラーの等式の美しさの評価と中学生における数学の得意の関係について調べた。その結果、非数学者（中学生）からみえる数式の美しさは、不完全ではあるが数式の実質的な特質によるものであり、オイラーの等式の美しさについて肯定的に評価する中学生は数学が得意な傾向にあることが分かった。また、オイラーの等式の美しさは、左辺の複雑さと右辺の簡潔さによる意外性や不均斉であると考察できた。なお、本研究では美しさについて特に「非数学者（中学生）からみる数式の美しさ」をいう場合、「美しさ」と表記することとする。

キーワード：オイラーの等式、美しさ、非数学者、中学生

1. はじめに

1.1 研究動機

数学において、その美しさの重要性が主張されてきた。また、数学の学習において、学習者が数学の美しさを捉えることの重要性も主張されている (e.g.花園隼人, 2014)。「The experience of mathematical beauty and its neural correlates」(Semir Zekiら, 2014)によると、15人の数学者に60個の数式を見せ、美しさの評価をとったところ、最も美しいと判断されたのはオイラーの等式であった。このことから、私はオイラーの等式の美しさや、中学生においても同じようにオイラーの等式の「美しさ」について肯定的な評価を得られるのかについて疑問に思った。そこで、私は中学生を対象にオイラーの等式の「美しさ」についてアンケート調査を行うことで、中学生がオイラーの等式に対して美しいと感じるかについての現状を明らかにするとともに、その評価からオイラーの等式の「美しさ」を考察できるのではないかと考えた。そのため、この研究テーマを設定した。

1.2 文献調査

1.2.1 先行研究

「The experience of mathematical beauty and its neural correlates」(Semir Zekiら, 2014)によると、15人の数学者と12人の非数学者に対して60の数式を見せ、理解度(0～3)と美しさ(-1～1)の評価を得たと述べている。その後、数学者のみに対してこれらの数式を見せながらfMRI(磁気共鳴機能画像法)によって被験者の脳の活動を観察し、数式の美しさに対して-5～+5の評価を得た。また、被験者はスキャン後に数式の理解

度（0～3）を報告した。その結果、スキャン前やスキャン中に一貫して最も美しいと評価されたのはオイラーの等式であった。また、非数学者において、美しいと評価した数式であってもそれに対する理解が不完全であったことから、非数学者が数式に感じる「美しさ」について、Semir Zekiらは「数式の形式的な特質」によるものだと考察した。

1.2.2 参考文献

『博士の愛した数式』（小川洋子、2003）では、非数学者の視点から、オイラーの等式の美しさについて

果ての果てまで循環する数と、決して正体を見せない虚ろな数が、簡潔な軌跡を描き、一点に着地する。どこにも円は登場しないのに、予期せぬ宙から π が e の元に舞い下り、恥ずかしがり屋の i と握手をする。彼らは身を寄せ合い、じっと息をひそめているのだが、一人の人間が1つだけ足算をした途端、何の前触れもなく世界が転換する。すべてが0に抱き留められる。

と述べられている。

『Newton別冊 数学の世界 数と数式編』（高森康雄、2020）によると、オイラーの等式は、スイスの数学者であるレオンハルト・オイラーが1748年に出版した著書『無限解析序説』の中で発表されたオイラーの公式から導き出せる数式である。また、科学者や数学者の多くが、オイラーの等式を世界一美しい数式と賞賛している。

オイラーの公式は、 e^x をテイラー展開した式に $x=ix$ を代入し、整理した後に1と x の偶数乗の項と x の奇数乗の項に分けると、 $\sin x$ と $\cos x$ をテイラー展開した式を用いて導くことができる（ $e^{ix}=\cos x+isinx$ ）。また、オイラーの公式に $x=\pi$ を代入すると、オイラーの等式を導くことができる（ $e^{i\pi}+1=0$ ）。

1.3 研究目的

先行研究において、数学について詳しい人物である数学者の、オイラーの等式の美しさの評価が高かったことから、中学生においてオイラーの等式の「美しさ」に対する評価は数学の得意と大きく関係しているのではないかと考えた。そのためアンケート調査を通して、オイラーの等式の「美しさ」に対する評価と、中学生の数学の得意の関係について調査する。また、調査で得られたデータから、オイラーの等式の「美しさ」について考察し、明らかにする。

2. 研究方法

2.1 アンケート調査 I

2.1.1 実験・調査対象者

全年齢を対象に、オイラーの等式の「美しさ」についてアンケート調査を行った。実施期間は2022年7月27日～8月26日であった。アンケートの回答数は42件であった。

2.1.2 実験手順

対象者の年齢や大阪教育大学附属天王寺中学校生徒であるか、性別は何か、数学は得意かを質問した。その後オイラーの等式を提示し、「あなたは次の数式についてどう感じます

か？」という質問を行った。数式の評価を問う質問については、「美しい」「美しくない」「どちらでもない」「その他（記述）」の4つの選択肢を設けて調査を行った。その後、オイラーの等式について説明し、再度数式の評価を問う質問を行った。

2.1.3 分析方法

オイラーの等式の説明を行っていない1回目の質問とオイラーの等式の説明を行った後の2回目の質問の結果を比較し、オイラーの等式に対して理解が深まったことによるオイラーの等式の感じ方の変化を分析することで、先行研究で述べられている「美しさ」をもたらすものが「数式の形質的な特質」かどうかについて考察する。「美しさ」をもたらすものの分析には、先行研究を用いる。

2.2 アンケート調査Ⅱ

2.2.1 実験・調査対象者

2022年度時点での中学生を対象に、オイラーの等式の「美しさ」についてアンケート調査を行った。実施期間は2023年2月25日～3月24日であった。アンケートの回答数は164件であった。

2.2.2 実験手順

対象者の学年や大阪教育大学附属天王寺中学校生徒であるかどうか、性別を質問し、「あなたは数学が得意ですか?」「あなたは数学の授業を理解して取り組んでいますか?」「あなたは数学のテストでどの位の点数を取りますか?」という3つの数学に関する質問をそれぞれ5件法で行った。これらの質問から「数学が得意であるかについての自己評価」「数学の授業を理解して取り組んでいるか」「数学のテストでどの程度の点数を取るか」の3つのデータが得られた。

これらの質問を行った後、オイラーの等式を示し、「あなたは次の数式を美しいと感じますか?」という質問を「1（美しくない）」～「5（美しい）」の5件法で行った。また、その様に評価した理由を自由記述で回答する形で質問した。

2.2.3 分析方法

オイラーの等式の「美しさ」の肯定的評価（4, 5）と否定的評価（1, 2）の割合を比較し、中学生におけるオイラーの等式の評価を分析する。

また、「数学が得意であるかについての自己評価」「数学の授業を理解して取り組んでいるか」「数学のテストでどの程度の点数を取るか」の3つのデータとオイラーの等式の「美しさ」の評価について、それぞれ相関係数を求め、オイラーの等式の「美しさ」の評価と数学の得意の相関関係を考察する。この分析を行う際のオイラーの等式の「美しさ」の評価は、それぞれの観点の評価（1～5）毎の美しさの評価の平均値とする。また、テスト成績との相関関係については、テスト成績の質問の未回答者のデータは含めずに計算している。

最後に、オイラーの等式の「美しさ」について肯定的（4, 5）に評価した回答者のオイラーの等式を美しく感じた理由の記述回答と、数学における「美しさ」を客観的に分析し

ている文献から、数学の「美しさ」をとらえ、オイラーの等式の美しさについて考察する。オイラーの等式の美しさを肯定的に評価した理由の自由記述は、テキストマイニングを用いてまとめた。

3. 結果

3.1 アンケート調査Ⅰ

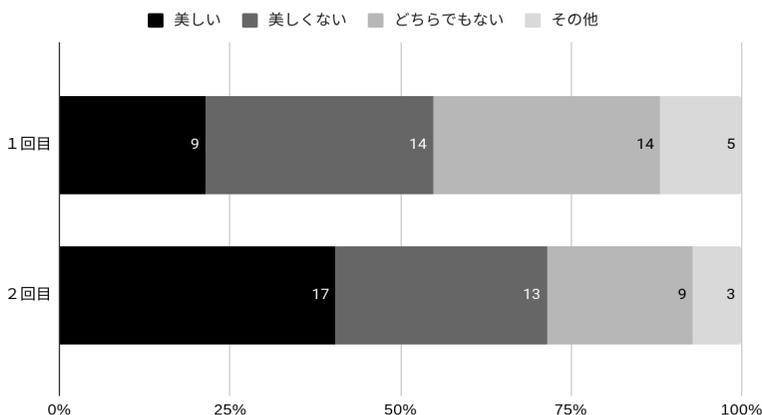


図1：オイラーの等式の「美しさ」の評価の割合の変化の様子

1回目（説明前）の評価では9人が「美しい」、14人が「美しくない」、19人が「どちらでもない」、または「その他」と回答したが、2回目（説明後）の評価では、17人が「美しい」、13人が「美しくない」、12人が「どちらでもない」、または「その他」と回答した。このことから、オイラーの等式の説明を加えると、「美しい」と評価する人の割合が高くなることがわかる。

3.2 アンケート調査Ⅱ

3.2.1 オイラーの等式の「美しさ」の評価の割合

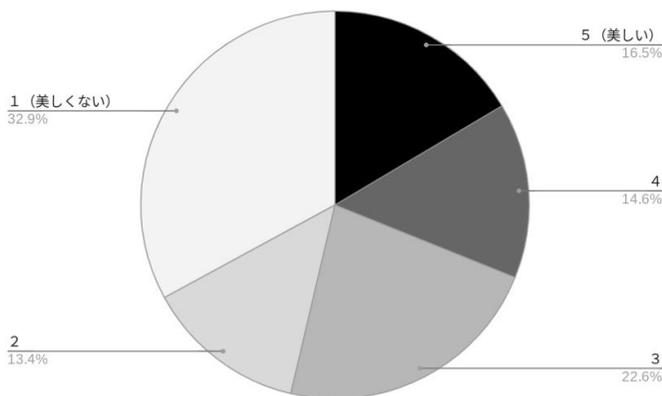


図2：オイラーの等式の「美しさ」の評価の割合

オイラーの等式を1（美しくない）と回答した人の割合は全体の32.9%（54人）、2と回答した人は13.4%（22人）であった。また、3（中立的な評価）と回答した人は22.6%（37人）だった。4と回答した人は14.6%（24人）、5（美しい）と回答した人は16.5%（27人）であった。つまり、肯定的（4, 5）な評価をした人（31.1%, 51人）よりも否定的（1, 2）な評価をした人（46.3%, 76人）の方が多という結果になった。

3.2.2 オイラーの等式の「美しさ」の評価と数学の得意の関係

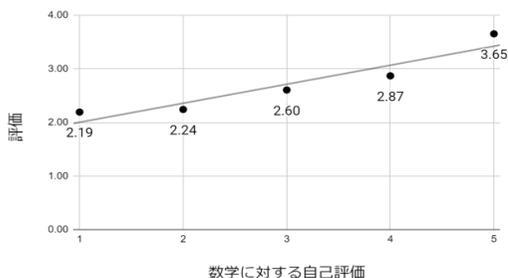


図3：オイラーの等式の「美しさ」の評価と数学に対する自己評価の相関関係

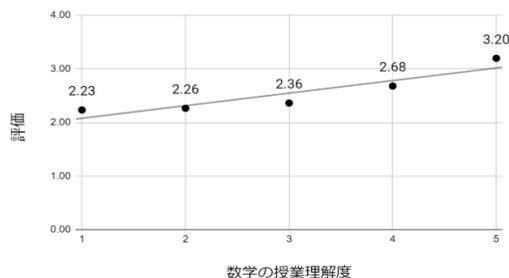


図4：オイラーの等式の「美しさ」の評価と数学の授業理解度の相関関係

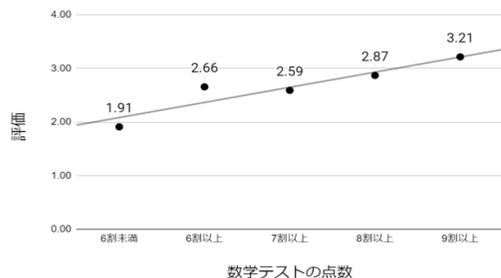


図5：オイラーの等式の「美しさ」の評価と数学テストの点数の相関関係

オイラーの等式の「美しさ」の評価と数学に対する自己評価の相関係数 r は、 $r \doteq 0.944$ であったため、強い正の相関が見られた。

オイラーの等式の「美しさ」の評価と数学の授業理解度の相関係数 r は、 $r = 0.92$ であったため、強い正の相関が見られた。

オイラーの等式「美しさ」の評価と数学テストの点数の相関係数 r は、 $r \doteq 0.932$ であったため、強い正の相関が見られた。なお、テストの点数に関する質問の未回答者は、この相関係数の算出に用いていない。

4.2.3 オイラーの等式の「美しさ」

花園隼人（2014）は「学校数学における「美しさ」をとらえる枠組みの構築—数学における「美しさ」の特色の分析を通して—」において（この文献内における「美しさ」とは学問としての数学で美しいとされる対象を美しくさせている性質を意味する）、

数学における「美しさ」は意外性を伴うものであり、意外性が生起する場面を考慮すると、混沌から秩序ある状態に変容するときに「美しさ」が生じる場合と、対極に位置する性質が共存しているときに「美しさ」が生じる場合があるという特色が明らかになった。

と述べている。研究の考察として、混沌から秩序ある状態に変容するときに生じる学校数学における「美しさ」をとらえる枠組みとして図7を提示した。また、対極に位置する性質が共存しているとき生じる「美しさ」は、2つの性質について主観によって定めることになるとして、考察の対象とされなかった。

S_c	S_o	「美しさ」をもたらした対象	「美しさ」

図7： $S_c \rightarrow S_o$ によって生じる学校数学における「美しさ」をとらえる枠組み

この枠組みを用いて、3.2.3で提示した肯定的回答の自由記述のテキストマイニングからオイラーの等式の「美しさ」を分析すると、図8より、左辺の複雑さから右辺の簡潔さに変容した際に生じる「意外性、不均斉」であるということが考察できた。

S_c	S_o	「美しさ」をもたらした対象	「美しさ」
左辺	右辺	オイラーの等式	意外性、不均斉

図8：オイラーの等式の「美しさ」

5. 結論

5.1 「美しさ」をもたらすもの

非数学者（中学生）からみる数式の美しさをもたらすものは、不完全ではあるが、「数式の実質的な特質」であるとわかった。

5.2.1 オイラーの等式の「美しさ」の評価

中学生は、オイラーの等式を美しいと感じにくいことがわかった。

5.2.2 オイラーの等式の「美しさ」の評価と数学の得意の関係

数学が得意な中学生はオイラーの等式を美しいと感じる傾向にあるとわかった。

5.2.3 オイラーの等式の「美しさ」

左辺の複雑さと右辺の簡潔さによって生じる意外性や不均斉であることが考察できた。

6. 参考文献

【図書】

小川洋子（2005）『博士の愛した数式』新潮文庫

高森康雄（2020）『Newton別冊 数学の世界 数と数式編』株式会社ニュートンプレス

【論文】

花園隼人（2014）「学校数学における「美しさ」をとらえる枠組みの構築—数学における『美しさ』の特色の分析を通して—」筑波大学大学院人間総合科学研究科学校教育専攻 学校教育学研究紀要 第7号

Semir Zeki、John Paul Romaya、Dionigi M. T. Benincasa、Michael F. Atiyah 「The experience of mathematical beauty and its neural correlates」(第8巻 2014年2月13日)

<https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fnhum.2014.00068/full>