

紐状コーラムの一筆書きになる確率

抄 録

格子点の配置方法と数の変化に伴う紐状コーラムの一筆書きになる確率の変化を明らかにし、また、それらのコーラムを図形として捉え、「対称性があるのかどうか、同形を持つのかどうか」という観点から分類し、それぞれが何種類存在するのかを求めることが本研究の目的である。そのために、正方形2種・ひし形1種を実際に描き、そこから得たデータと柳沢・長田(2007)のデータを基にして考察を行った。その結果、格子点の数の増加による確率の変化はひし形より正方形の方が小さく、配置に関係なく格子点の数が増加すると確率は低くなることが分かった。また、対称的なものの種類の数は、正方形とひし形であり差異はなく、共に増加傾向にあった。それに対して同形を持たないものに関しては、ひし形は格子点の増加に伴い増えるが、正方形においては一つも存在せず変化はない、ということが分かった。

キーワード：コーラム、一筆書き、二進数

1. はじめに

コーラムとは、南インド各州において見られる装飾模様的一种であり、その模様は女性によって主に玄関先に米粉などを用いて描かれる。紋様の様式にはかなりの多様性があるが、大きく「幾何学的なもの」と「具象的なもの」に分類することが可能である。前者は規則的に配列された「点」をガイドラインにして、単純な直線や円弧、多角形の組み合わせにより描かれる。

今回扱うコーラムは「幾何学的なもの」であり、紐状コーラムとも呼ばれる。今後、「コーラム」は紐状コーラムを表すものとする。

1.1 研究動機

インドから来られたSmita Pradip Rajmane先生に美術の授業でコーラムを教わり、幾何学が関係していると聞いて興味を持った。コーラムについて詳しく調べていると、一筆書きについての論文を見つけたが、不明確な点も多かったため研究してみようと思った。

1.2 先行研究の概要及び問題提起

1.2.1～1.2.3は柳沢・長田(2007)によるものである。

1.2.1 ルール

コーラムを描く上でのルールは、以下の通りである。

- ・点は正方格子〔格子A〕の交点上に配列すること。
- ・描線の直線部は格子Aから45度傾いた双対格子に従って、描線の円弧部は最寄りの点を

中心として描くこと。つまり、(図1)の線上を通らなければならない。

- ・描線は閉じること。
- ・一度描いた線をなぞってはいけない。
- ・描線が閉じた際に配列点の全てが描線によって囲まれること。
- ・線は滑らかに描くこと。

1.2.2 二進数

全てのコーラムは、双対格子の交点で「交わらない」0と「交わる」1の二進数での表記が可能である。図2では、白丸が「交わらない」、黒丸が「交わる」となっている。

1.2.3 データ

「1-5-1」(例1)のコーラムが一筆書きになるのは0.366%、そのうち同形を持たない(回転させたりひっくり返したりしても同じものが存在しない)ものは35種類、対称的なもの(線対称・点对称)は9種類である。

「1-7-1」は一筆書きが0.017%、そのうち同形を持たないものが1458430種類、対称的なものは1520種類である。

ただし、点を1, 3, 5, 3, 1, のようにひし形に並べたものは「1-5-1」、 3×3 のように正方形に並べたものは「 3×3 」と表している。

1.2.4 問題提起

「1-5-1」と「1-7-1」のデータについては明記されているものの、格子点の並べ方や格子点の数を変えた場合の、確率及び対称性のあるもの・同形を持たないものの種類の数については不明である。

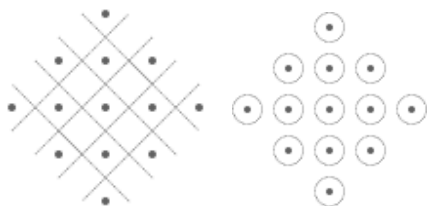


図1 ルール

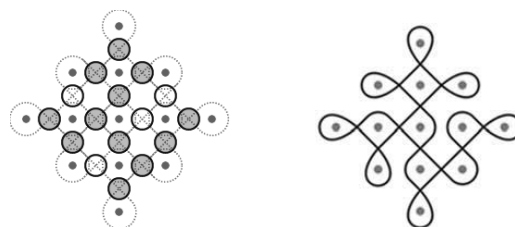
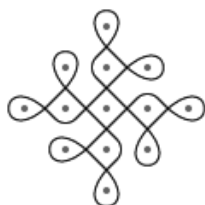


図2 二進数



例1 「1-5-1」

1.3 研究目的

格子点の配置と数を変えた時のコーラムが一筆書きになる確率はどのように変化していくのかを明確にする。また、一筆書きになったものの中で、同形を持たないものと対称性のあるものが何種類あるのかについても明らかにする。

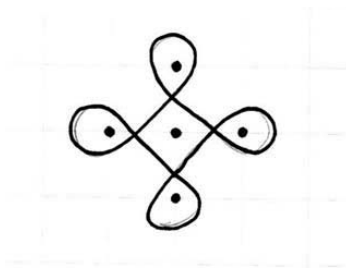
2. 研究方法

2.1 研究手順

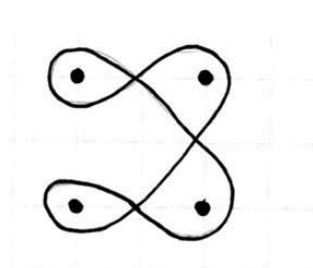
本研究では、ひし形「1-3-1」、正方形「2*2」「3*3」の3つについて調べていくこととした。

2.1.1 「1-3-1」「2*2」

ひし形「1-3-1」(例2)と正方形「2*2」(例3)についてはどちらも16通りずつ(双対格子の交点が4個より 2^4)のため、全て描くことにした。



例2 「1-3-1」

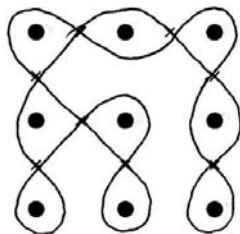


例3 「2*2」

2.1.2 「3*3」

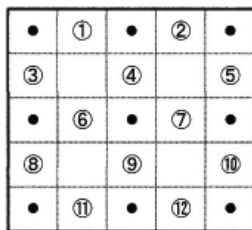
正方形「3*3」(例4)については4096通り(双対格子の交点が12個より 2^{12})あるが、単純に全て描くのは難しいと判断したためExcelを活用することにした。12桁の数字と双対格子の交点の位置を一対一対応させることで、二進数の「1」の場所のみに×印が入るようにし、×印をつなげることで作業効率を向上させた(図3)。

951
1110110111
001110110111



例4 「3*3」

12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1



3192
110001111000

1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
		●		●				●			
					×				×		
		●	×	●	×	●					
		●	×	●	×	●					

図3 Excelによる効率化

3. 研究結果

3.1 「1-3-1」

16通り全て描いた結果、一筆書きになったのは1個(図4)であった。このことから、一筆書きになる確率は1/16つまり6.25%であると分かった。また、このコーラムは対称的であり同形を持たない。したがって、どちらも1種類ずつとなった。

3.2 「2*2」

16通り全て描いた結果、一筆書きになったのは4個(図5)であった。このことから、一筆書きになる確率は4/16つまり25%であると分かった。また、これらのコーラムはどれも対称的ではあるが同形を持つ。したがって、対称性のあるものは1種類となり、同形を持たないものは存在しない。

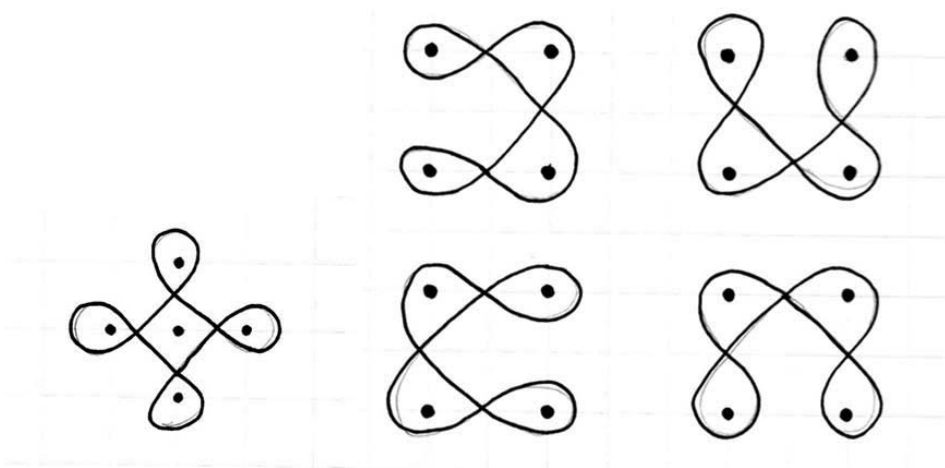
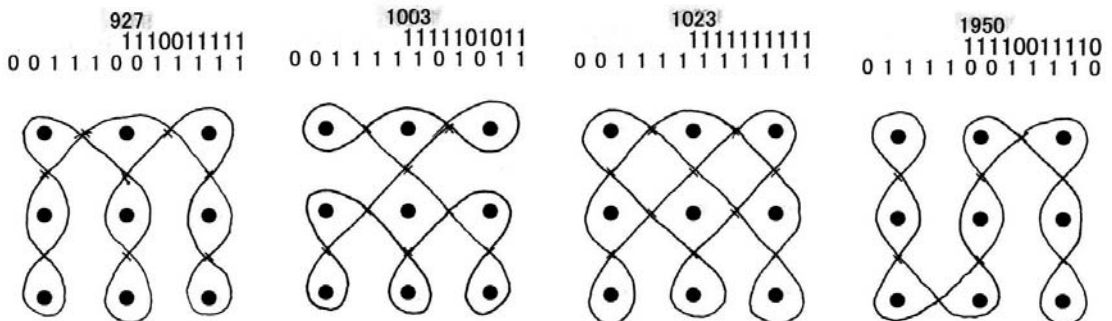


図4 「1-3-1」結果

図5 「2*2」結果

3.3 「3*3」

4096通り全て描いた結果、一筆書きになったのは240個であった。このことから、一筆書きになる確率は240/4096、つまり5.86% (小数第三位を四捨五入) であると分かった。これらのコーラムは、対称的なものは10種類、同形を持たないものは存在しないことが明らかとなった(図6)。



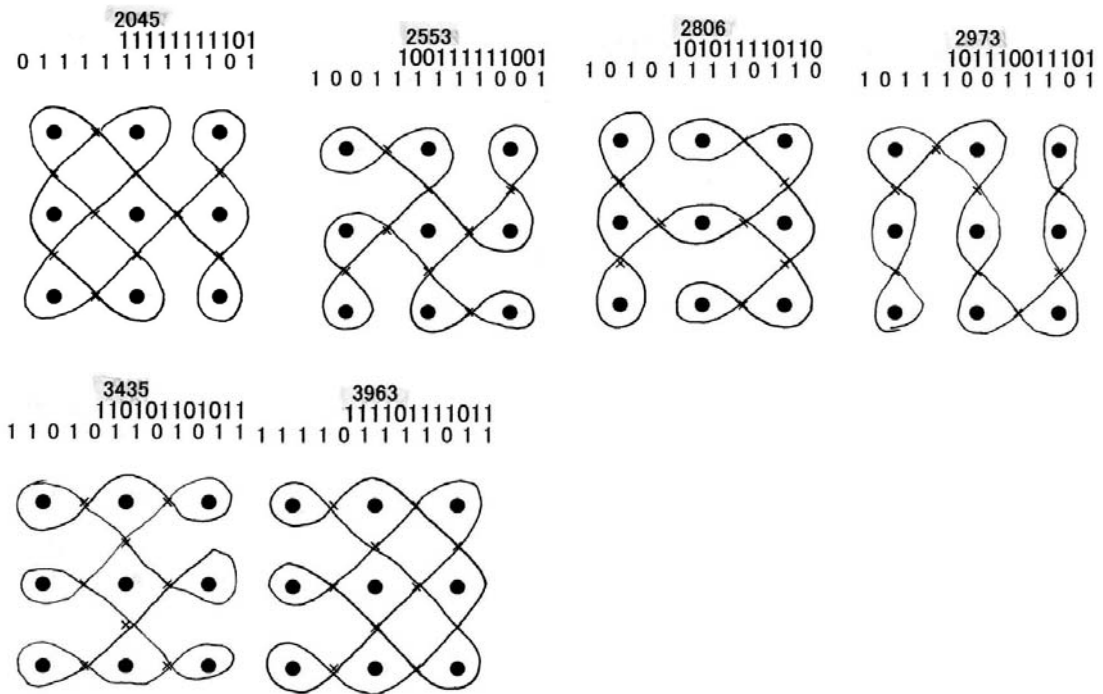


図6 「3*3」結果

本研究の結果と柳沢・長田（2007）のデータをまとめた結果，次のようになった。

表1 格子点の配置別データ

	1-3-1	1-5-1	1-7-1	2*2	3*3
格子点の数	5	13	25	4	9
総数	16	65536	68719476736	16	4096
一筆書き	1	240	11661312	4	240
確率	6.25%	0.37%	0.02%	25%	5.86%
対称的	1	9	1520	1	10
同形を持たない	1	35	1458430	0	0

(全て小数第三位を四捨五入)

4. 考察

表1のデータを基にして，考察を行った。

4.1 格子点の配置と一筆書き

「1-3-1」と「2*2」を比較しても「1-5-1」と「3*3」を比較しても，一筆書きになる確率は，ひし形より正方形の方が高くなっている。したがって，正方形の方がひし

形より確率が高くなると言える。

4.2 格子点の数と一筆書き

ひし形、正方形どちらの場合も、格子点の数が増えるとコーラムが一筆書きになる確率は低くなった。また、形に関係なく格子点の増加に伴い確率は低下すると言える。

4.3 対称的なもの、同形を持たないもの

対称的なものの数については、ひし形と正方形であり差はなく、共に格子点を増やすと増加する傾向にある。

同形を持たないものの数については、ひし形では増加傾向にある。それに対して、正方形では、一つも存在しなかった。ひし形は二つの軸に対して線対称であるが、正方形は四つの軸に対して線対称であるのが理由だと言えるだろう。

5. 成果と課題

コーラムにおいて格子点の数を増加させると、格子点の配置に関係なく一筆書きの確率は減少する。

一筆書きの確率について「 2×2 」と「 $1-3-1$ 」を比較すると、格子点の数が1つしか増加しないにもかかわらず、一筆書きの確率は著しく減少している。その一方で「 $1-3-1$ 」と「 3×3 」を比較すると、格子点の数が4つ増加するにもかかわらず、確率はほんのわずかしこ減少していない。これらのことから、一般的にひし形より正方形の方が一筆書きの確率が高くなると言える。

対称的なものの数は正方形・ひし形共に増加し、同形を持たないものについては正方形では一つも存在しなかったが、ひし形では増加した。

本研究では「 $1-3-1$ 」「 $1-5-1$ 」「 $1-7-1$ 」「 2×2 」「 3×3 」のデータしか得られていないため、その傾向を調べるのが目的ではあったものの、少ないデータから自分なりに読み取るしかなかった。さらに研究を重ねより多くのデータを得ることで、正確なものにしていくことが今後の課題と言える。

参考文献

柳沢究・長田昌次郎 (2007) 「Fundamental Study on Design System of Kolam Pattern」
Forma,22,31-46

「コーラム模様のデザインシステム：究建築研究室Q-Labo.」

<q-labo.info/article/00047.php> (2019年6月15日アクセス)