

折り紙で正多角形は何種類折れるのか？

—オリガミクスを追究する—

抄 録

今回オリガミクスや折り紙の正多角形の折り方について調べ、実際に折って正確性を検証した。また、参考文献のいずれにも記載されていなかった正十二角形は作成可能か否か模索した。結果、理論的に示された正多角形の折り方に従うと実際に辺や角が正確に折れる図形が多く、辺の数が多く折る回数が多い図形ほど誤差が生じ易いと分かった。加えて、正十角形までの折り方を参考に正十二角形の折り方を発見した。

キーワード：折り紙，オリガミクス，正多角形，図形の正確性

1. はじめに

オリガミクスの定義は「科学折り紙の一分野で模倣作品を作ることを目的とせず紙を折ったり重ねたりして、そこに生じる数理現象を追究すること。」である。理学博士の芳賀和夫氏によって定義された。

2. 研究動機と目的

折り紙は誰もが幼少期に遊んだ遊びであり日本の文化でもある。そんな折り紙で幾何学的な正多角形を折ることができ、定規とコンパスでは作図不可能な正多角形でさえも折り紙だけで作図可能になると知り驚きと共に深い関心を抱いた。

この研究テーマを選んだ理由は、オリガミクスについての知識を増やし、折り紙の可能性を見出したいと考えたからだ。その為に、理論的に示された折り方で正多角形を折ると実際に辺・角が正確に折れるのか、正十二角形は製作可能か検証し明らかにする。

3. 研究方法

3.1 文献調査

折り紙，オリガミクス，正多角形の折り方について調べる。

3.2 折り紙で折った正多角形の正確性

文献調査で学んだ方法を元に15cm四方の折り紙を用いて正三角形～正十角形(16種類)を折る。

その後、分度器・定規を用いて完成後の図形の各辺・各角度の値を測定する。実際に測定した図形は以下の通りである。

正三角形・・・内接最大正三角形・中心綴じ正三角形A・中心綴じ正三角形B・両面無地正三角形

正方形・・・たとう正方形・中心綴じ正方形・両面無地正方形・七変化正方形

正五角形・・・ネクタイ綴じ正五角形・四頂点集中折り正五角形・たとう正五角形

正六角形・・・中心綴じ正六角形
正七角形・・・ネクタイ綴じ正七角形
正八角形・・・たとう正八角形
正九角形
正十角形

3.3 正十二角形の折り方の模索

正十二角形の性質や正三角形～正十角形の折り方を参考に、正十二角形の折り方を考える。

4. 研究結果

4.1 文献調査

4.1.1 折り紙の基礎

用紙については一般的には折り紙専用の正方形の紙を使う。しかし、作品によっては長方形（主に辺の比が1：2の物）やその他の紙を使う場合もある。最も普通に売られている折り紙は15cm角だが、5cm角・24cm角・35cm角などの折り紙も市販されている。稀ではあるが、円形の折り紙もある。

歴史については日本の折り紙は独自に発達したものであり、千代紙のような折り紙専用の紙は他国には存在しない。16世紀末には日本で折り紙が確立していたと考えられ、現在、日本語の「折り紙」が世界に浸透しており、「origami」という言葉が通用する。

数学への応用で古くから関心を持たれる分野は、作品を傷める事無く折り紙作品を平らに折り畳むことができるのか、紙を折ることで数学の方程式をできるのかなどである。

4.1.2 五箇条の制約

芳賀（1999）によると折り紙で図形を折る過程で注意すべき点が5つある。

- ・紙は無地の何の印も模様も無い正方形を出発点とする。
- ・素手で折る。よって、定規・分度器・コンパス・鉛筆を使ってはいけない。指の腹と爪を使う。ただ、作業の場として机のような硬い平面を必要とする。この場合も机に付いていた印などを利用してはならない。
- ・作り上げた幾何図形を再びほどこいて広げた時に元の正方形に復するものでなければならない。つまり、ハサミで裁ち切ったりちぎったりしてはならない。
- ・出来上がった幾何図形は安定でなければならない。指を離れたとたんに形が崩れてしまう物は完成形としない。2～3m放り投げて壊れなければ合格である。
- ・仕上がりは芸術的でなければならない。無駄な線は極力省く一方、必要な線は細くはつきり付ける。紙の表面には出来るだけ皺が寄らないように扱い、一か所の紙の折り重なりはより少なくなるよう工夫して正確さを保つようにする。

4.1.3 正十一角形が折り紙で折れない理由

正十一角形はコンパスと定規（メモリ付でも）では作図不可能である。折り紙でも折ることが出来ない。その理由は、主に2つある。

- ①折り紙で5次方程式が解くことができないから。
- ②中心角が $32.7272\dots$ 度、内角が $147.2727\dots$ 度より有限小数で表すことが出来ないから。

4.2 折り紙で折った正多角形の正確性

以下は図形を角度・辺において誤差の大きさを分類した表である。

表1：正多角形（16種類）角度・辺における分類表

角度・辺の誤差なし	誤差 1 mm又は 1 度	誤差 2～3 mm又は 2～3 度
内接最大正三角形	中心綴じ正三角形 A	ネクタイ綴じ正七角形
中心綴じ正三角形 B	ネクタイ綴じ正五角形	たとう正八角形
両面無地正方形	四頂点集中折り正五角形	正九角形
たとう正方形	たとう正五角形	正十角形
中心綴じ正方形		
両面無地正方形		
七変化正方形		
中心綴じ正六角形		



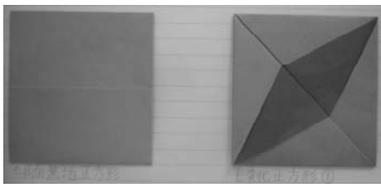
(左) 内接最大正三角形
(右) 両面無地正三角形



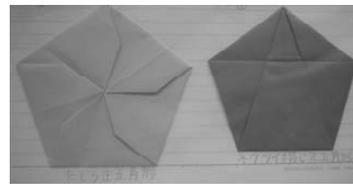
(左) 中心綴じ正三角形 B
(右) 中心綴じ正三角形 A



(左) たとう正方形
(右) 中心綴じ正方形



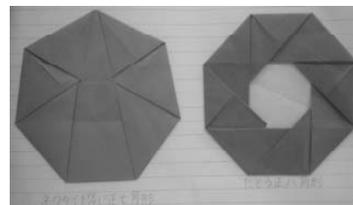
(左) 両面無地正方形
(右) 七変化正方形



(左) たとう正五角形
(右) ネクタイ綴じ正五角形



(左) 四頂点集中折り正五角形
(右) 七変化正方形



(左) ネクタイ綴じ正七角形
(右) たとう正八角形



正九角形



正十角形

4.3 正十二角形の折り方の模索

4.3.1 正十二角形の性質

中心角と外角は30度, 内角は150度である。対角線の本数は54本である。定規とコンパスで作図可能な図形である。1辺の長さを a とすると面積は $S = 3a^2/2 - \sqrt{3}$ と表せる。

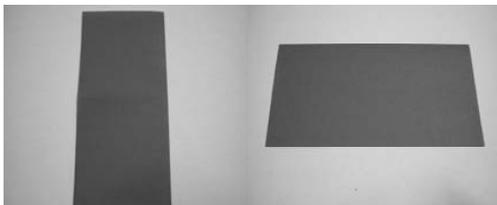
4.3.2 正十二角形の折り方

正十二角形は折り紙で製作可能であることを明らかにし, その折り方を発見した。

折り方は以下の通りである。

- (i) 折り紙を縦に半分, 横に半分折る。
- (ii) 横に半分折った状態で, 右上の角を中心に合わせて小さい折り目を付ける。この折り目をA点とする。
- (iii) 左上の角をA点に合わせて折る。この折り線をB線とする。
- (iv) 一度 (v) の状態まで戻し, 中心を支点としてA点をB線に合わせて折る。反対側も同様に折る。
- (v) 折り紙を開ける。その後, C線の上端と下端を合わせて折る。D線も同様に折る。
- (vi) 折り紙を開ける。その後, D線で左部を折り, その辺が交わるC線上とE線上に小さい折り目を付ける。その他も同様に折り目を付ける。
- (vii) (vi) で付けた折り目を頼りに1辺ずつ折る。

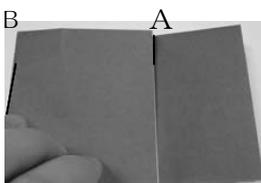
(i)



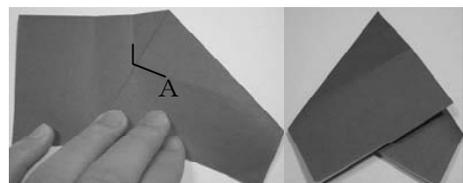
(ii)



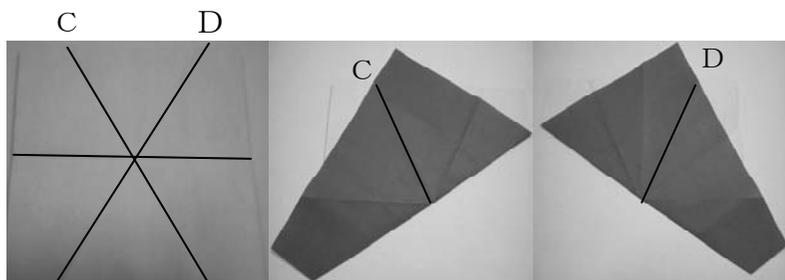
(iii)



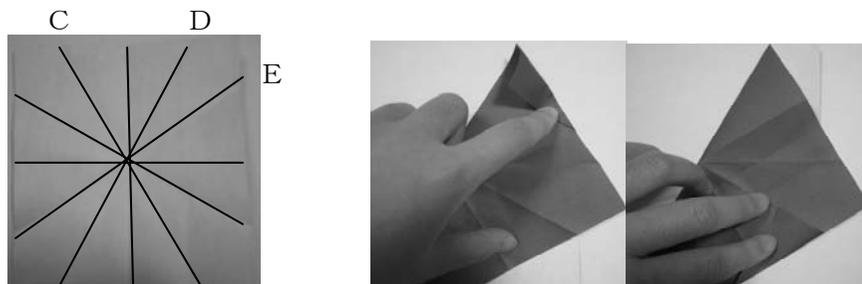
(iv)



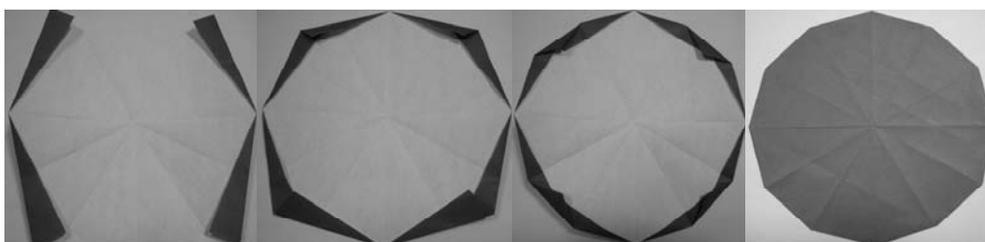
(v)



(vi)



(vii)



4.3.3 参考にした折り方

一つ目は中心綴じ正三角形Bである。

この図形から「60度の折り方」を引用した。なぜなら、中心角60度が折れると、その60度の角の二等分をして、中心角30度が折れるからだ。これにより、正十二角形の中心を通り30度ずつずれる対角線を定められる。

二つ目に正十角形である。

この図形から「各頂点の定め方」を引用した。なぜなら、正十二角形の中心から各頂点までの距離が元の折り紙の1辺の半分に等しいからだ。これにより、対角線上に各頂点を定められる。

4.3.4 折り紙で折った正十二角形の正確性

辺については誤差が無かった。(全て3.9cm)

内角については2度までの誤差があった。(149度～152度)

5. 考 察

表1と折り紙で折った正十二角形の正確性より、辺の数が多く折る回数が多い図形ほど誤差が生じ易いと分かる。この原因は主に、重ねて折った時の紙の厚みだと考えられる。また、ずれた折り線を折る確率も高くなり、その線に合わせて折る折り線にもずれの影響を及ぼすことと考えられる。

正三角形・正方形・正五角形の写真より、同じ種類の正多角形でも折り方が異なると大きさが異なる図形があると分かる。

正十二角形の性質より、折り紙で正十二角形が製作可能な理由は、中心角が30度であることと中心から各頂点までの距離が等しいことだと考えられる。

6. 結 論

理論的に示された正多角形（正三角形～正十角形，正十二角形）の折り方で折り紙を折ると、実際に辺・角が正確に折れる図形が多い。しかし、一辺3mm以内または一角3度以内の誤差が生じる図形もある。いずれにしても、目分量では全て正確な正多角形に見える。

正十一角形がコンパス・定規（目盛付も含む）・折り紙で作図不可能な理由は、折り紙で5次方程式を解けず、中心角・内角共に有限小数で表せないからである。

折り紙は多くの可能性を秘めている。これは、折り紙が正方形であり、折ることで辺・角の等分などが出来るからだ。たいていの場合、遊びとして利用されているが、数学の発展に大いに役立っている。本研究では、「正多角形への応用」を実証した。

7. おわりに

折り紙を出来るだけ丁寧に誤差が生じないように折る努力をしたが、やはり手作業だった事、紙の厚さが原因で誤差が生じた図形もあった。この誤差を減らすのが、課題である。

文献調査をしていく過程で正多角形以外にも正多面体やデルタ多面体を折り紙で作る事が出来、円や三角形の折り紙から折り鶴を折れる事を知った。どれも大変興味が湧く内容だった。今後は、本研究を活かして上のような立体図形にも挑戦し、折り紙の更なる可能性を実感したい。

8. 参考文献

永沼利彦『オリガミクスと数学教育』honbn_04.pdf

芳賀和夫（1999）『オリガミクス幾何図形折り紙Ⅰ』日本評論社

堀井洋子（1977）『折り紙と数学』明治図書出版

三谷純（2013）『図形と折り紙』18_file.pdf

倭算数理研究所—正多角形の面積

wasan.hatenablog.com/entry/2015/08/28/020003（2017年8月12日アクセス）