発見・証明・活用で学ぶ三平方の定理

−操作的原理に基づく活動による単元デザイン−

島橋　尚吾（しまはし　しょうご）

抄録：本研究では、三平方の定理の学習を「発見→証明→活用」の数学的活動として再編し、操作的原理に基づく活動を核に単元全体をデザインした。本校第３学年144名の振り返り記述を観点Ａ～Ｅで一次分類した結果、小結Ｉでは条件整理と逆向きの思考、小結Ⅱでは証明の筋道化と説明の必然化、小結Ⅲでは既習事項の統合と妥当性（誤差・最適化）への言及が現れた。操作的原理を中心軸に据えることで、発見・証明・活用の接続を促す可能性が示唆された。

キーワード：三平方の定理、操作的原理、証明、数学的活動、ジクソー法、ワールドカフェ

１．はじめに

中校学習指導要領（平成29年告示）解説数学編では、「三平方の定理は直角三角形の３辺の長さの関係を表しており、数学において重要な定理であり、測量の分野でも用いられるなど活用される範囲が極めて広い定理である。〔中略〕直角三角形だからこそ成り立つ関係の美しさに触れられるような工夫と配慮が望まれる。」と示されている。三平方の定理は、中学校数学科で学習する定理の中で最もよく知られている定理であると言えるだろう。この定理は平方根や合同・相似な三角形など様々な分野との関連があり、複合的な思考を求められるので高次な学習内容である。しかし、そのような学習内容だからこそ、三平方の定理の重要性・汎用性・良さ・面白さ・美しさについて生徒が感じることができるのではないだろうか。先人たちが見つけた三平方の定理を、単元導入から単元の利用・応用まで精査された内容であることが、三平方の定理の良さ・美しさなどを生徒に伝えることに繋がるのではないかと考える。したがって、本研究では三平方の定理の授業を、単元導入から単元の利用まで、様々な先行研究を参考にしつつ指導計画を立案し、単元全体をデザインしたい。

２．研究の目的と方法

2.1　研究の目的

本研究の目的は、三平方の定理の学習を「発見→証明→活用（モデル化・制作）」という一連の数学的活動として捉え、操作的原理に基づく活動を核に単元全体をデザインすることで、生徒の振り返りに表れる見方・考え方の変容を明らかにする。

2.2　先行研究から中心軸決定に向けて

まず初めに、中学生は三平方の定理を学習する意義をどのように感じているのか、中学生へのインタビュー調査を通して考察した研究について調べた。その研究では、三平方の定理の学習を通して中学校第３学年の生徒たちが三平方の定理について捉えている意義を明らかにすることを目的とし、天野ほか（2023）は、以下の結果が得られたと主張している。

① 直角三角形に注目することで問題解決できる
② 利用しやすい定理
③ 三平方の定理に対する好印象

つまり、学習者からすると、直角三角形に注目できれば問題解決に繋がり、他の定理と比べて利用しやすい定理なので、好印象を抱きやすいのだろう。

次に、ドイツのドルトムント大学のヴィットマン（E. Ch. Wittmann、1996）は、三平方の定理を例にして、数学の教材の指導デザインの一般的な３つの原理について述べている。さらに、その原理は「非形式的証明、特殊化の原理、操作的原理」の３つであるという。米田（2009）は、ヴィットマンによる数学の教材の指導デザインの有意義性について、

「ヴィットマンが考える数学の教材の指導デザインにもとづいて教材を開発すれば、三平方の定理の教材に限らず色々な単元で授業を実践していくことが可能と思われる。」

と結論を述べている。また、米田（2009）は、ヴィットマンによる数学の教材指導デザインの一般的な３つの原理の内、

「操作的原理とは対象を理解するための重要な教授原理であるといえよう。実際、学校現場における算数・数学の授業の中で、教師が生徒に試行錯誤するように求めて問題に取り組ませる場面をよ

く見かける。これはまさに操作的原理を利用した例の１つであろう。」

と操作的原理に基づいた操作活動の重要性を述べている。ここまでの先行研究を終えて、操作活動を学習の中心軸とし、直角三角形に注目して問題解決できるように単元全体をデザインしていきたい。

2.3　定理発見から定理証明までの授業

学習者にどのような流れで直角三角形に注目させるかを検討する。数学者ピタゴラスの歴史的背景や逸話から単元導入しても良いのだが、先人たちが歩んだ何万分の一でも良いので、三平方の定理に至るまでの過程や発見までの苦労を生徒にも体験させ、感動を経験させたいと思う。

そこで、操作活動を通して直角三角形についての三平方の定理を発見させる学習指導についての２つの授業実践研究（形川、1981）、（大谷、2017）を参考にした。どちらの研究も切紙細工の操作活動を通して生徒が三平方の定理を発見する教材についての研究を行っている。形川（1981）の研究は、大小２つの正方形のうち、どちらかを一方を**図１**のように上手に切断することで、１つの大きな正方形を作り出す。そして、三平方の定理の発見への学習課題へと繋げる。

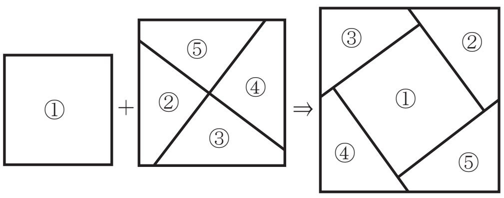


図１　形川（1981）の研究より

図１の学習後は、さらに切紙細工の操作活動で授業を展開していくのだが、渡辺ほか（2012）は、この研究に対して「定理の発見と証明との接続については述べられていない。」と指摘している。確かに三平方の定理発見後の流れは、言及されていなかった。一方、大谷（2017）の研究は、**図２**のように大小２つの正方形を、あるきまりで切断された５つのピースから１つの大きな正方形を作り出す操作活動を通して、生徒が三平方の定理を発見する教材についての研究を行っている。

図２の学習後は、大小２つの正方形をどのようなきまりで切断されているのか考え、調べる活動を通して生徒は直角三角形に少しずつ注目し始める。そして、**図３**のように、大小２つの正方形の面積の和が、１つの大きな正方形の面積に等しい関係から、直角三角形の３辺の長さの関係を見出す。さらにこの大谷の研究では、三平方の定理の単元全体をデザインしているので、三平方の定理発見から定理証明まで切紙細工の操作活動を中心に構成されている。しかし、三平方の定理の証明後は、操作活動が無くなった授業展開でまとめられている。三平方の定理の利用でも操作活動を学習の中心軸とした課題を設定したいと考えているため、引き続き先行研究を進めることとする。

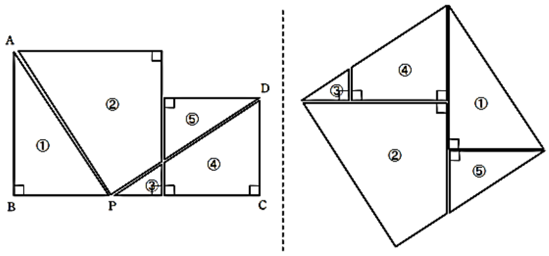


図２　大谷（2017）の研究より

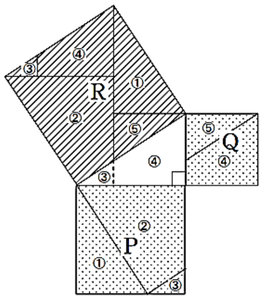


図３

三平方の定理を発見し、いよいよ三平方の定理の証明へと移行していくが、中学校学習指導要領（平成29年告示）解説数学編では、「三平方の定理が証明できることを知ること」とされている。三平方の定理の証明方法は100通り以上あるとされており、森下（2014）は有名な証明法から非形式的証明法まで多岐に渡る証明法をまとめている。偉人たちが挑戦してきた三平方の定理の証明法を知ることで、三平方の定理の面白さ・美しさを生徒に感じ取って欲しい。また、中川ほか（2014）は、「授業実践の結果から、三平方の定理の証明は見いだす対象となる可能性」を示している。この研究より、三平方の定理の証明をすべて書けるようになることは難しいが、三平方の定理が証明できることを知ることは、授業の流れを授業者が工夫すれば多くの可能性があると感じた。ジクソー法やワールドカフェ方式の生徒同士による集団探究の活動の場面を設定することで様々な証明法の理解を促し、生徒が証明法を説明できるように授業者として仕掛けを行う。したがって、多くの三平方の定理の証明法を知ることだけに留まらず、生徒自身の言葉で証明法について説明できるという可能性を模索したい。

2.4　三平方の定理の利用における操作活動

図形の計量は、直角三角形の辺の長さが具体的に数値として与えられて計算するため、生徒にとっては取り組みやすいという面があり、天野ほ

か（2023）が研究結果として示した「利用しやすい定理」に生徒は感じることだろう。しかし、問題を解くだけや計算するだけでは、三平方の定理の良さを感じられないのではないかと思い、操作活動を通して三平方の定理を利用する題材を探した。そこで注目したのが、『５個のボールがきちんと入る箱の設計・製作』という題材（武内、2004）である。いくつかの同じ球を箱に入れることを考えたとき、その計量は正三角形、円と接線について、角の二等分線などの問題に帰着できる。三平方の定理を利用した箱の製作という条件設定の下で、生徒の多様な考えを引き出したい。多様な考えを引き出すための工夫として、**図４**のように、まずは３個入りの箱の設計図を作成し、空間図形における図形の計量を通して、正三角形の問題に帰着させる。

５個のボールが入る箱を製作する中で、ボールが箱の中でごそごそと動かないようにきちんと入れるためには、**図５**のようなボールの配置などが考えられる。

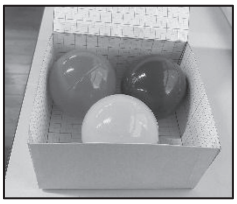


図４

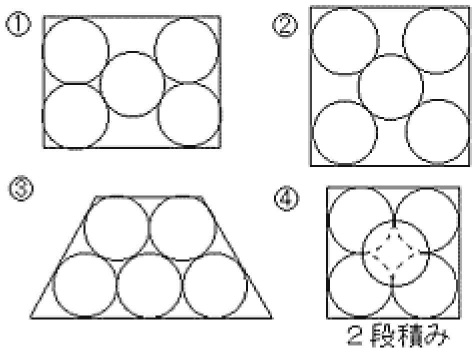


図５

①～④はいずれも箱を平面図として捉えられるが、ボールを３個入れるときより、図形の計量が難しい。

①は、二等辺三角形の頂角から、対辺に垂線を下すことで直角三角形を見出す。②は、箱の四隅に配置されたボールの中心点を結ぶと正方形ができ、正方形の２本の対角線は、お互いを垂直に二等分することで直角三角形を見出す。③は、円と接線の関係や、角の二等分線の性質から、90°、60°、30°の直角三角形を見出す。①～③までは、平面図形に帰着させて考えやすいが、今まで学習してきた平面図形の知識を上手く活用し、三平方の定理を利用して課題解決を行う。

一方、④の場合、ボールが立体的に配置されていることでさらに図形の計量が難しくなるだろう。５個のボールの中心点を結ぶと正四角錐ができ、できた正四角錐の高さを考えることで、箱の高さに繋がる。①～④のどのパターンの箱を選択したとしても、難易度は高いと予想されるので、４人班を１つのチームとして、パフォーマンス課題の協働学習の位置付けで生徒には提示したい。また、協働学習とすることで、「自分１人では課題解決できそうにないが、チームで１つの箱を完成させるのであれば、④に挑戦してみたい」などと前向きな姿勢で課題に取り組む生徒の姿が見受けられることを期待している。

『５個のボールがきちんと入る箱の設計・製作』の２時間目の授業では、①～④の箱に決定した理由を他チームと意見交流し、自分のチームが製作した箱と他チームが製作した箱のどちらが良いと考えられるのか、数学的な観点だけでなく、多様な角度から検討し、論理的・客観的な批判的思考でお互いの箱の形の良さについて議論できる場を設ける。

以上の研究方法の下で、実践授業を実施し、授業における生徒の振り返りから、本研究の課題点を見つけ、教材モデル構築を目指す。

2.5　生徒の振り返りの分析枠組み

本研究では、2024年度の授業において本校76期生（144名）の生徒の振り返り記述を分析対象とした。なお、2023年度の授業において本校75期生にも同様の内容の学習指導を行っているため、**６．学習指導案略案**に参考資料として掲載している。
生徒の振り返りの分析枠組みを行う上で、以下の（１）～（３）を基に、生成AIでデータの整理を行なった。

（１）各振り返りを１件の分析単位としてテキスト化し、課題の指示文やタイトル等は除去した。
（２）観点Ａ～Ｅは、記述中のキーワードを手掛かりに一次分類し、小結I(第１～３回)、小結II(第４～７回)、小結III（第８～13回）ごとに集計した（複数付与可）。
（３）各観点の特徴が表れる記述を代表記述として抽出し、結果の記述に用いた。なお、本稿の集計は一次分類であり、観点の妥当性・信頼性の検討は今後の課題とする。

2.6　分析手順

分析観点は、小結Ⅰ～Ⅲで一貫して用いるため、以下のＡ～Ｅを事前に定義した（複数付与可）。
観点Ａ：数学的概念・技能（量・図形の性質、計算、補助線、図形の構成、展開図など）
観点Ｂ：推論・証明（仮定−結論、条件整理、結論

から辿る、理由・根拠の明確化、証明の構想など）

観点Ｃ：説明・対話（他者への説明、意見交換、協働による気付きの獲得など）

観点Ｄ：情意・価値（面白さ・驚き・達成感、今後への期待、数学の良さの実感など）

観点Ｅ：批判的思考・メタ認知（誤差・限界・妥当性の検討、比較、改善の視点など）

３．授業実践の計画

本研究の授業実践の指導計画は、**表１**の通りで全13時間分を実施した。

表１　指導計画（76 期生）

日　程	授　業　内　容
11月19日（火）小結Ⅰ	５つのピースから正方形を作る活動を通してパズルの切り方の秘密の探究
11月20日（水）小結Ⅰ	前時で出来た四角形が正方形であることを証明し、三平方の定理の発見に繋げる
11月26日（火）小結Ⅰ	三平方の定理が直角三角形でしか成り立たないことの調査
11月27日（水）小結Ⅱ	合同な直角三角形から三平方の定理の証明
12月３日（火）小結Ⅱ	三平方の定理の色々な証明方法の探究（ジクソー法×ワールドカフェ方式）
12月10日（火）小結Ⅱ	三平方の定理の色々な証明方法の説明
12月11日（水）小結Ⅱ	三平方の定理の逆が成り立つことの理解 三角形が直角三角形かどうか判断
12月17日（火）小結Ⅲ	平面図形や空間図形の色々な長さ
１月14日（火）小結Ⅲ	『３つのボールがきちんと入る箱』の設計図作成活動①
１月15日（水）小結Ⅲ	『３つのボールがきちんと入る箱』の製作活動②
１月28日（火）小結Ⅲ	『５つのボールがきちんと入る箱』の設計・製作活動①
１月29日（水）小結Ⅲ	『５つのボールがきちんと入る箱』の設計・製作活動②、まとめの活動
２月４日（火）小結Ⅲ	富士山の頂上から見渡せる範囲の探究

４．分析結果と考察

本節では、生徒の振り返り記述を観点Ａ～Ｅで整理し、小結Ⅰ～Ⅲごとの傾向を示す。

4.1　観点別出現の概観

各小結における観点Ａ～Ｅの出現割合（キーワードに基づく一次分類、複数付与可）を**表２**に示す。

表２　小結別の観点出現割合（複数付与可のため合計は 100%を超える）

観点	小結Ⅰ (n=368)	小結Ⅱ (n=458)	小結Ⅲ (n=521)
A：概念・技能	66.3%（244）	52.6%（241）	73.3%（382）
B：推論・証明	48.9%（180）	75.5%（346）	9.8%　（51）
C：説明・対話	4.1%　（15）	16.4%　（75）	3.5%　（18）
D：情意・価値	4.6%　（17）	11.4%　（52）	3.5%　（18）
E：批判的思考	0.8%　　（3）	2.4%　（11）	2.1%　（11）

小結Ⅰでは概念・技能（Ａ）と条件整理を含む推論（Ｂ）が中心であり、小結Ⅱでは推論･証明（Ｂ）と説明・対話（Ｃ）が増加した。小結Ⅲでは利用場面の記述が中心となり、概念・技能（Ａ）が再び高くなる一方、設計課題において誤差や最適化に触れる記述（Ｅ）が散見された。

4.2　小結Ⅰ：条件整理と「逆向き」の思考

導入～発見段階では、正方形を作る操作活動を手掛かりに、必要十分条件の見極めや、結論から辿る思考が目立った。例えば、「すべての角を求めずに…１つの角と４つとも同じ辺ということだけで正方形とわかるのは大事」、「証明は闇雲にせずに逆向きに考える」といった記述が見られた（観点Ａ・Ｂ）。また、「公式は知っていたが、正方形の組み立てから導かれるとは思っていなかったので驚いた」など、定理の背景に触れた驚きも確認できた（観点Ｄ）。

4.3　小結Ⅱ：証明の構想と説明の必然化

証明段階では、複数の証明方法を比較しながら、仮定‒結論を意識して筋道を立てる記述が顕著であった（観点Ｂ）。さらに、「人にわかるように説明するには、変化の過程も必要」「細かく書く必要性を改めてわかった」等、説明可能性を意識する記述が増えた（観点Ｃ）。これは、ワールドカフェ等の協働的手法が、個人内の理解を他者に共有可能な形へと再構成させる契機になったことを示唆する。

4.4　小結Ⅲ：汎用性の実感と妥当性

利用段階では、立体の対角線や特別な直角三角形の比など、既習事項を組み合わせる記述が多かった（観点Ａ）。一方で、設計課題では「底辺の長さを変

えると…最適な形を考察していきたい」といった最適化への言及や、「√ を四捨五入したため…誤差を考えることは大切」といった妥当性への言及が現れ、数学を目的に合わせて用いる姿が見られた（観点Ｂ・Ｅ）。また、「数学がこんな形で役立つとは思わなかった」といった価値づけも確認でき、汎用性の実感に繋がっている（観点Ｄ）。

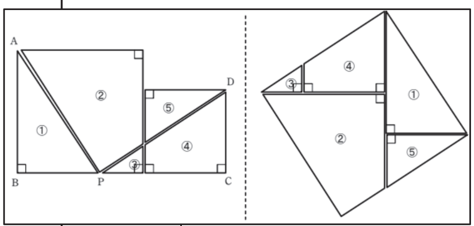
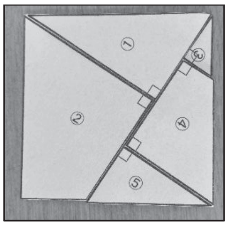
５．まとめと今後の課題

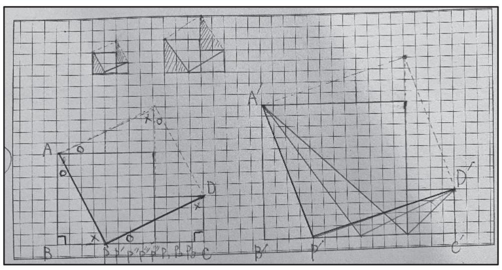
本研究では、操作的原理に基づく活動を単元の中心軸に据え、生徒の振り返りを一定の観点で整理することで、単元内での学びの焦点の移り変わりを捉えた。今後は、観点Ｅ（妥当性・限界・改善）を意図的に引き出す問い返しや評価規準の工夫を加え、設計課題における数学的モデリングの質を高めることが課題である。

６．学習指導略案（2023年度に実施した授業の生徒（75期生）の振り返りを参考資料として掲載する。）

第１時　2024年11月19日（火）

<table>
<tr><th>学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》</th><th>指　導　上　の　留　意　点</th></tr>
<tr><td>【導　入】</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">【学習課題１】５つのピースから正方形を作ってみよう。</td></tr>
<tr><td>・５つのピースから正方形を作る活動において、２つの小さい正方形から１つの大きな正方形ができることを知り、ピースを動かすことで解決の糸口を探す。
《①②③と④⑤で正方形が２つできた。》
《５つのピースを使うことで１つの大きな正方形が偶然できた。》
《①と③④を平行移動すると大きな正方形になる。》

［予想される疑問］の全体共有
・このパズルはどうやって作られているのか？
・２つの小さな正方形の大きさを変えると、このパズルは作成できるのだろうか？
・∠APD=90° に切り分けることが大切だが、どのような切り方でもできるのだろうか？</td><td>・パズルを操作することを通して、２つの小さな正方形から１つの大きな正方形ができたことを、視覚的に分かるように黒板で工夫して提示する。また、この活動が三平方の定理を見いだすきっかけとなる。

・友達と相談しながら考えたり、説明したりする時間を設ける。

・生徒の疑問を抽出する。その疑問に対して、２つの小さな正方形の条件を変えることで結論を推論する。</td></tr>
<tr><td>【展　開】</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">【学習課題２】学習課題１で考えた５つのピースは、どのようにして作ることができるのか条件を変えた複数の具体例から考える。方眼用紙１目盛を１㎝として、２つの正方形を作図することを通して調べてみよう。</td></tr>
<tr><td>・２つの小さな正方形の大きさを変えることで１つの大きな正方形を作ることができるのか調べる。
・点Ｐの位置にきまりがあるのか見つけるために点Ｐの位置を変えて調べる。
《正方形の大きさを変えても成立しそうだが、点Ｐの位置によって、成立しない場合が存在する。》
《点Ｐの位置のきまりは、ＢＰ=ＣＤとなるように点Ｐを設定すれば良いと思うが、出来上がった四角形は「正方形」だと言い切れるのかわからない。》
《２つの小さな正方形が合同である場合は、点Ｐの位置が２つの小さな正方形が接している点である。》
［新たな疑問］の全体共有
・【学習課題２】において、２つの小さな正方形からできた１つの大きな四角形は、正方形になるのだろうか？</td><td>・共通の視点で議論ができるように正方形を２つ並べて、点Ａと点Ｄを通るように２回切ることを切り方の約束とする。
・「いつでも成立するのか」という問いを解消できるように、正方形の大きさや点Ｐの位置を生徒自身で決めて作図させる。

生徒のプリントの一部</td></tr>
</table>

【終　末】 ・本日の授業において、【学習課題２】から分かったことや、まとめを表現する。	・ロイロノートの付箋機能を使って提出箱へ送信する。 ・［新たな疑問］については、次回の授業で考える。

《生徒の振り返り ：2023年度授業より抜粋》

A組男子生徒：**正方形をパズルのように動かして、新しい正方形を作るのが面白い**。その新しい正方形は本当に正方形なのかを確かめたい。四角形で２組の対辺がそれぞれ平行で等しいと言えれば、その四角形は必ず正方形である。

A組男子生徒：ＢＰ＝ＣＤとなるように点Ｐを取り、ＡとＰ、ＤとＰを結び、△ＡＢＰを小さい正方形の上に平行移動、△ＤＣＰを大きい正方形の上に平行移動すると、２つの正方形よりもさらに大きい四角形ができた。

A組女子生徒：**タレスの定理を使うことで90°を作る**ことができ、正方形になるのに必要な「角度が90°である」という条件を考えることができた。

B組男子生徒：２つの正方形を切って組み立て、さらに三角形を平行移動させることで形が出来上がった。また、∠ＡＰＤが直角となるかは、**座標平面上の２つの線分の垂直条件**でわかった。

B組女子生徒：∠ＡＰＤ＝90°、ＢＰ＝ＤＣだった場合、２つの正方形を組み合わせてできる四角形（正方形）ができる。この**２つの条件が満たされるものしか、正方形はできないのだろうか？**

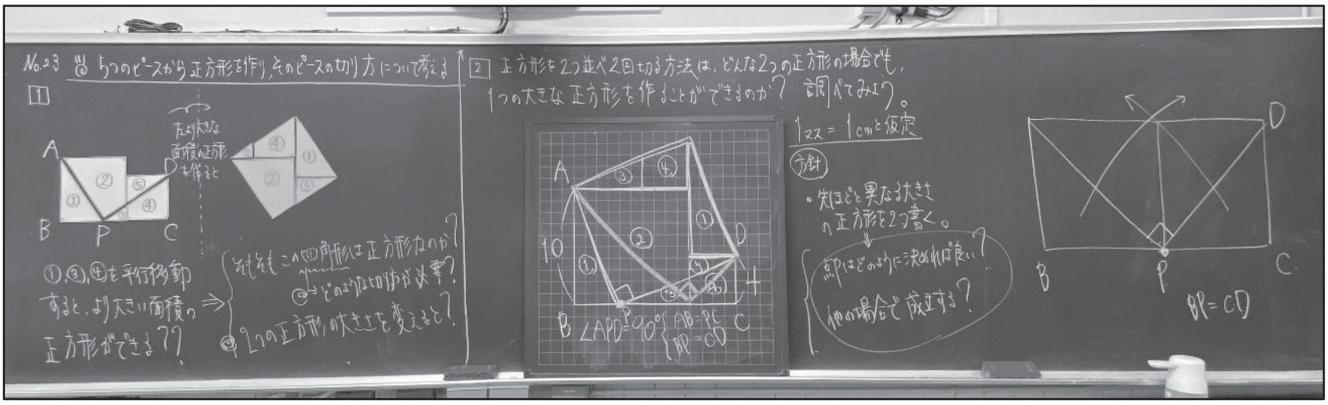
C組男子生徒：２つの正方形から１つの正方形を作った。数学的に何も考察できないと思ったが、**自分で考えたり、数値を考えることで、合同な三角形を見つけた**りすることができ、考察できた。

C組女子生徒：方眼用紙のおかげで大きさの違う色々な正方形でも成立することがわかった。次は、**本当に正方形になっているのか証明してみたい**。

D組男子生徒：**辺の長さを文字で置き、一般化にトライしようとした**が、授業時間内に上手くいかず失敗した。

D組女子生徒：２つの小さな正方形から１つの大きい正方形を作り、そのピースの切り方を考えることができた。また、**大きい正方形の切り方で平方根の長さをかくことができそうだと思った**。

第１時　2024年11月19日（火）の板書

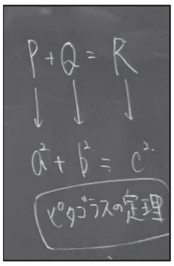
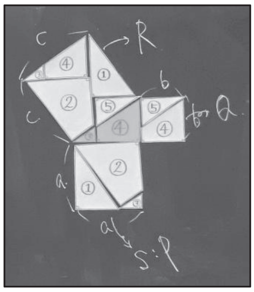


第２時　2024年11月20日（水）

学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》	指　導　上　の　留　意　点
【導　入】 ・前時の［ 新たな疑問 ］を確認する。 ・本時の学習課題の確認をする。	・本時の学習課題を提示するためのきっかけとする。

【学習課題３】 ＢＰ＝ＣＤとなる点Ｐをとり、△ＡＢＰと△ＰＣＤを平行移動させたとき、四角形ＡＰＤＱができた。四角形ＡＰＤＱが正方形であることを証明するための構想・見通しを立てよう。

【展　開】 ・四角形ＡＰＤＱが正方形であることを証明するための条件を個人で整理し、学級で共有する。そのとき、証明を逆向き設計で構想・見通しを立てる。	・一人一人が考えを持つことができるように、初めから証明を書くことを目標とせず、図を使って証明の構想・見通しを立てる時間をまずは大切にする。

《４つの辺がすべて等しい、４つの角がすべて等しい２つの条件を同時に満たす必要がある。》 ↓ 《４つの角がすべて等しいことまで言わなくても、４つの辺が等しい四角形だと∠ＡＰＤ＝90°であれば、正方形になるのではないか。》 ↓ 《△ＡＢＰと△ＰＣＤの合同を証明してみよう。》	・証明の構想・見通しを結論から遡ることで生徒の思考の流れを整理し、解決すべき課題を焦点化させる。そうすることで、生徒は何から証明を書き始めるべきか見通しを持つことができる。 ・見通しを持つことで証明を書きたいという生徒が多数いると予想されるため、合同の証明のみ挑戦させる。
【学習課題４】 △ＡＢＰ≡△ＰＣＤであることを証明しよう。	
・仮定はＢＰ＝ＣＤ、２つの正方形であることより、結論が△ＡＢＰ≡△ＰＣＤであることを証明し、完成した証明を周囲の生徒同士で確認する。 ・①と③、④の三角形を平行移動させると、２つの小さな正方形から１つの大きな正方形に変化した様子を黒板で再度確認する。 ・正方形の面積についての式 $a^2+b^2=c^2$ から直角三角形の辺に関する「三平方の定理」の発見に繋げる。 《$a^2+b^2=c^2$ が成立する直角三角形があることは理解できたが、他の直角三角形や三角形であればどうなるのだろうか。》 ［新たな疑問］ ・どのような三角形であれば、$a^2+b^2=c^2$ が成立するのだろうか？	・生徒同士で確認している間は机間指導を行い、証明の書き方で気になる生徒に声掛けを実施する。 ・２つの小さな正方形の１辺の長さをそれぞれ a、b とし、１つの大きな正方形の１辺の長さを c としたとき、正方形の面積についての式 $a^2+b^2=c^2$ が成立していることを確認する。また、面積についての式だけではなく、直角三角形の辺の長さについても成立していることを共有する。  
【終　末】 ・本日の授業から分かったことや分からなかったことや、まとめを表現する。	・ロイロノートの付箋機能を使って提出箱へ送信する。 ・［新たな疑問］については、次回の授業で考える。

《生徒の振り返り：2023年度授業より抜粋》

A組男子生徒：２つの正方形をパズルのように動かして新しく**できた四角形が正方形なのかを証明するのがとても楽しかった**。また、**三平方の定理を見つけた人はすごいと思う**。

A組女子生徒：**ひし形の１つの角が90°だと、その形は正方形**だと言えるが、平行四辺形の１つの角が90°だと正方形だと言い切れないことを復習することができた。

A組女子生徒：証明するときに、最終的に辿り着かなければいけないゴールからどのような要素が必要なのかを考え、逆算していくことでより速く証明を組み立てることができるとわかった。また、知らないうちに三平方の定理が出てきて驚いた。

B組男子生徒：特定の直角三角形の辺と、それにぴったりはまるような正方形３つとの関係を合同の証明から紐解くことができた。ただ、**どの三角形でも同じことが言えるのだろうか？検証してみたい**。

B組女子生徒：三角形の合同をまず証明することで正方形であることの証明ができるようになる。**すべての辺が等しい四角形はひし形であり、ひし形は対角がそれぞれ等しいので１つの角が90°と分かればすべての角が90°であることがわかる**。など基本的なことをしっかりとりかいしていれば証明を簡潔にまとめられる。

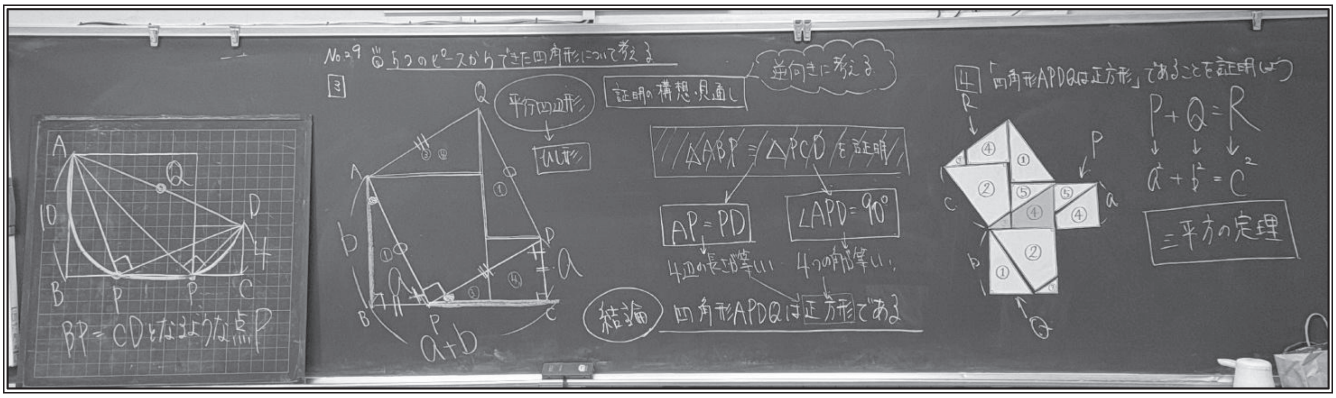
C組男子生徒：**ピタゴラスの定理は様々な証明方法があるのは知っていたが、今日みたいな方法で証明したのは初めてだったので面白かった**。

C組女子生徒：証明の仕方がわかっていなかったが、**証明を逆向き設計でを考えること**が大切だとより感じた。

D組男子生徒：三平方の定理は塾で学習していたが、なぜそうなるのかわかっていなかった。それを今回証明したことにより、三平方の定理への理解が深まったので良かった。**証明も意外と楽しいのではないか**と思えるようになってきた。

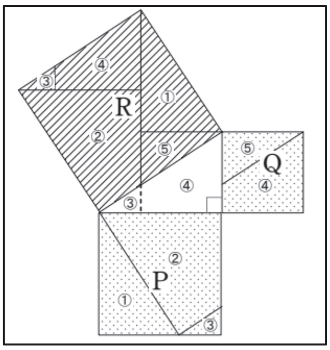
D組女子生徒：四角形が正方形であることを証明するのは大変だったが、三角形の平行移動などから証明したので、いつもより証明が書きやすくなったと思う。

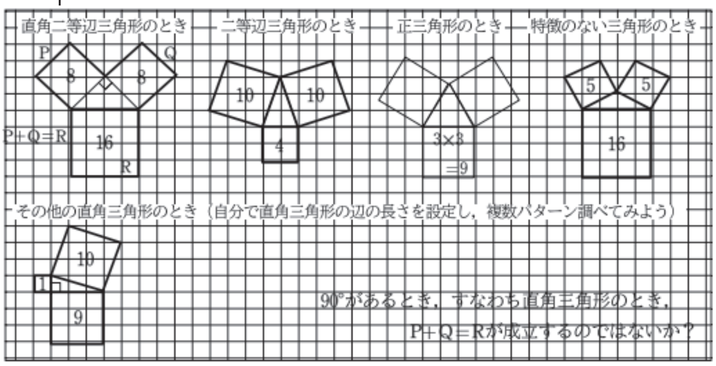
第２時　2024年11月20日（水）の板書



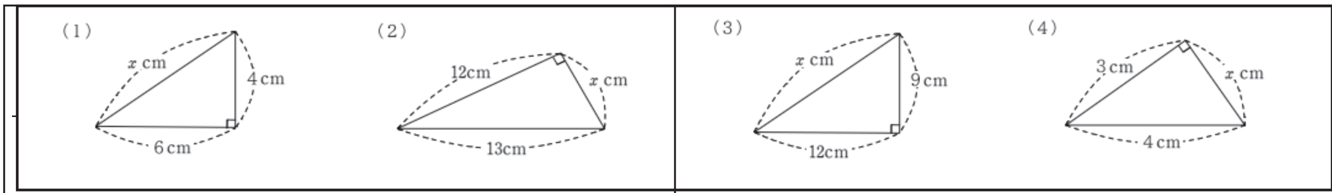
第３時　2024年11月26日（火）

学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》	指　導　上　の　留　意　点
【導　入】 ・前時の［ 新たな疑問 ］を確認する。 ・本時の学習課題の確認をする。	・本時の学習課題を提示するためのきっかけとする。
【学習課題５】 Ｐ＋Ｑ＝Ｒ（Ｒ＞Ｐ≧Ｑ）が成り立つ、３つの正方形のそれぞれの１辺から三角形ができた。できた三角形の特徴を考え、どのような三角形であればＰ＋Ｑ＝Ｒが成り立つか調べよう。	
【展　開】 ・③と④の三角形の特徴について考える。 《直角三角形ができている。》 ・Ｐ＋Ｑ＝Ｒが成立する三角形を見つけるために、どのような三角形で調べるのか考える。 《直角二等辺三角形は成立するだろう。》 《二等辺三角形や正三角形は成立しないかも。》 《特徴のない三角形も成立しないと思う。》	・「いつでも成り立つのか」という問いかけから、色々な三角形を扱うことで直角三角形しか成り立たないことを確認する。 ・方眼用紙にかかれた三角形で調べさせ、Ｐ＋Ｑ＝Ｒが成り立つ三角形について考察する。





《予想通り直角三角形であれば、Ｐ＋Ｑ＝Ｒが成り立つことがわかった。》 《三平方の定理を用いることで、直角三角形の２辺の長さがわかっているとき、残りの１辺の長さを求めることができるだろう。》	・「直角三角形の直角をはさむ２辺の長さを a と b、斜辺の長さを c とすると、$a^2+b^2=c^2$ が成り立ち、このことを三平方の定理という。」ことを確認する。
・三平方の定理で、直角三角形の辺の長さを求める問題に取り組む。	・帰納的に見出だした三平方の定理で直角三角形の辺の長さを求める問題を通して、定理の習得を目指す。



《平方根の定義より、解は正の数にも負の数にもなり得るため、そこを考える必要があるのか。》 《三平方の定理の計算方法を習得することができた。》	・三平方の定理を利用することを明らかにしてから立式し、計算過程を記述することを意識させる。また、解の吟味を行う必要性を考えさせる。
【終　末】 ・本日の授業から分かったことや分からなかったことや、まとめを表現する。	・ロイロノートの付箋機能を使って提出箱へ送信する。 ・今回の授業では、三平方の定理を帰納的に見出したため、三平方の定理の証明方法について考えていく必要性があることを確認する。

《生徒の振り返り：2023年度授業より抜粋》

A組男子生徒：**自分の予想とは違って、意外にも直角三角形以外では三平方の定理が成り立たなかった。**

A組女子生徒：三平方の定理を使用できる**直角三角形の全部の辺が整数となる組に規則性はあるのだろうか**ということが気になった。

B組男子生徒：新しい定理について知ることができて良かった。日常で活用できるかまだわからないが、**活用できる場面があればどんどん活用していきたい**。

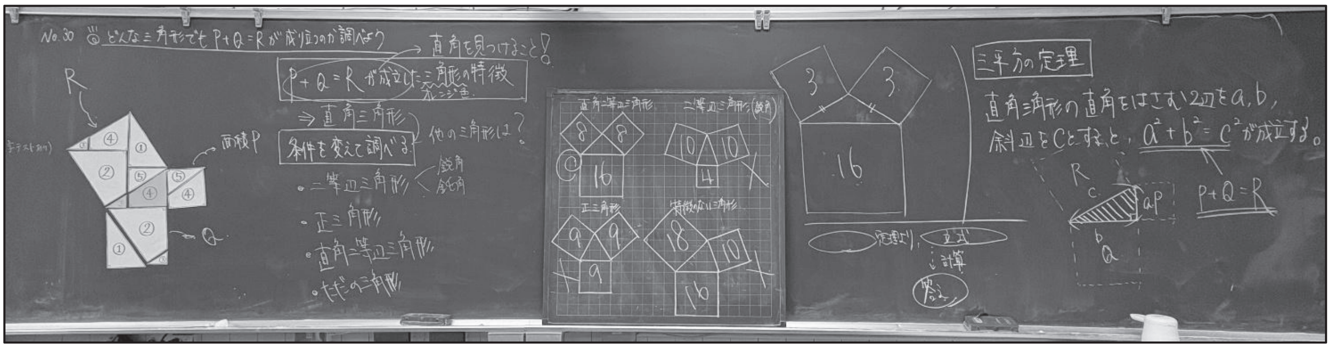
B組女子生徒：三平方の定理を使った問題の記述において、$x^2 = 7$ の解を求めるとき、当たり前のように $x = \sqrt{7}$ としていたが、二次方程式の解なので $x = -\sqrt{7}$ も解であることを除外していた。**解の吟味をする必要がある**とわかった。

C組女子生徒：方眼用紙に三角形と正方形をかいて確かめることで、三平方の定理についての理解がより深まって印象に残った。

D組女子生徒：三平方の定理が本当にそうなるのかなど体験することで印象的に覚えることができた。もう直角三角形など怖くない。また、直角をはさむ２つの辺と斜辺の区別を間違えないようにしたい。

D組女子生徒：三平方の定理は、直角三角形や直角二等辺三角形のときにだけ成立し、正三角形や二等辺三角形や特徴のない三角形では成立しないということがわかった。また、実際に問題演習をしてみて、直角三角形のある辺の長さを求めるときには、その辺が三平方の定理のどこに当てはまるか考える必要があった。

第３時　2024年11月26日（火）の板書

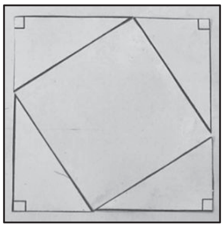
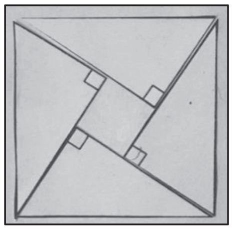
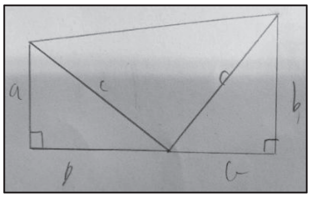
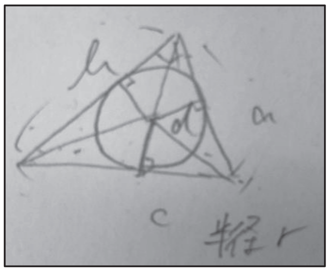


第４時　2024年11月27日（水）

<table>
<tr><th>学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》</th><th>指　導　上　の　留　意　点</th></tr>
<tr><td>【導　入】
・前時より帰納的に見出だした三平方の定理の証明方法を考えることが本時の目標であり、仮定と結論を明確にすることで学習課題を把握する。
・直角をはさむ２辺の長さを a と b、斜辺の長さを c とする直角三角形と合同な三角形が複数印刷されたプリントから直角三角形をハサミで切り出す。</td><td>
・三平方の定理は、多くの偉人たちが魅せられた定理であり、生徒も自分で証明したいという気持ちが芽生えるようにする。
・三平方の定理の証明方法は100通り以上の方法があるので、証明を考える方向性を絞るために合同な直角三角形を複数使用して、証明する方法を考えさせる。</td></tr>
<tr><td colspan="2">【学習課題６】直角三角形の直角をはさむ２辺の長さを a と b、斜辺の長さを c とするとき、$a^2+b^2=c^2$ が成り立つことを証明しよう。ただし、合同な直角三角形を２つ以上４つ以下を使用すること。</td></tr>
<tr><td>【展　開】
・切り出した直角三角形を並び替えたりすることで三平方の定理の証明方法を個人で考える。

・個人で考えたことを周囲の生徒と共有し、様々な視点があることを確認する。
《直角をはさむ２辺の長さを a と b、斜辺の長さを c とする直角三角形を使って、結論である $a^2+b^2=c^2$ を導くために、面積について立式すれば、２乗が出てくるので解決しそう。》
《合同な直角三角形を４つ使用する場合は、すぐにわかったが、「２つ以上」とプリントには書かれているので、挑戦したい。》
《直角三角形が２つの場合は、三平方の定理を証明することができたが、直角三角形が１つだけの場合では、三平方の定理を証明することができないのか挑戦したい。》
・周囲の生徒と共有したことを学級全体に図や式を使って説明する。

・三平方の定理の証明方法をさらに探究している生徒の考えに触れる。
《三角形の内接円もしくは、外接円を使って三平方の定理を証明することができないのか挑戦しています。》
《直角三角形が１つだけの場合で証明したいと思い、直角から斜辺に垂線を引くことで、相似な三角形から三平方の定理を導くことができました。》

［新たな疑問］
・合同な直角三角形を複数使用せずに、三平方の定理を証明する方法では、どのように証明することができるのか？
・数学者ピタゴラスと三平方の定理との関係についての説を聞く。また、本時で出てきた三平方の定理はすでに偉人たちによって証明されてきたことであると理解する。
《三平方の定理は、ピタゴラスの定理と呼ばれていることは知っていたから、ピタゴラスが新たに発見し</td><td>・「その式は図のどの部分を表しているのか」「なぜそれが言えるのか」「どのようなことに注目をしたから証明できたのか」など、より数学的に考えたり説明したりできるような視点を投げかけ、図と式を定式化する。
 

生徒のプリントより
・机間指導をしていた時に探究を進めている生徒をあらかじめピックアップし、それらの生徒の考えを説明させる。

生徒のプリントより
・次回の授業では、時間を費やして三平方の定理の証明に挑戦してきた多くの偉人たちの考えに、より深く触れていくことを伝える。
・「数学者ピタゴラスは、三平方の定理を発見した人である」と、生徒は何となく感じ取っているはずなので、ピラミッドの建設時とピタゴラスの生存していた時期にズレがあることに気付かせることで、三平方の定理の考え方は古くからある概念であることを紹介する。</td></tr>
</table>

た定理だと思っていた。	
【終　末】 ・本日の授業から分かったことや分からなかったことや、まとめを表現する。	・ロイロノートの付箋機能を使って提出箱へ送信する。

《生徒の振り返り：2023年度授業より抜粋》

A組男子生徒：三平方の定理は、公式を覚えるだけでなく、理論的なことも知っておく必要があるのではないかと感じた。また、**自分なりに証明することができてうれしかった**。

A組女子生徒：三平方の定理の証明の方法が100種類以上あることに驚いた。自分は２つの方法でしか証明することができず、**他の人が内接円などを利用して証明しているのを見てすごいなと感じた**。

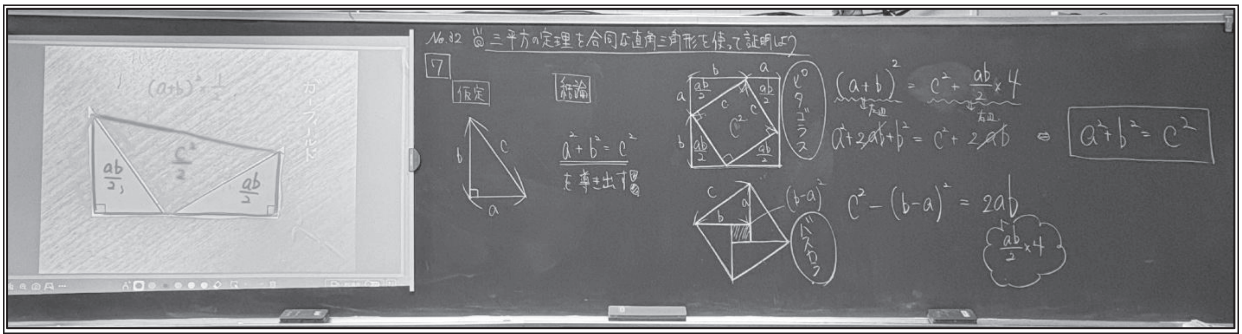
B組男子生徒：合同な三角形を４枚使った台形の形で三平方の定理を証明したい。**もっと見つけたいと思った**。

B組女子生徒：証明を考えるときに c^2 から逆算して２辺が c になる正方形を考えてみると思いつくことができた。証明を考えるときにはやはり結論から逆算していくことが大切なのだと分かった。

D組男子生徒：新しく発見された証明方法はもとよりあった証明方法の不要な部分を削って最適化していることがわかった。

D組女子生徒：たくさんの偉人たちが三平方の定理の証明に挑戦していることがわかり、**同じ定理を色々な方法で証明することができることを面白く感じた**。

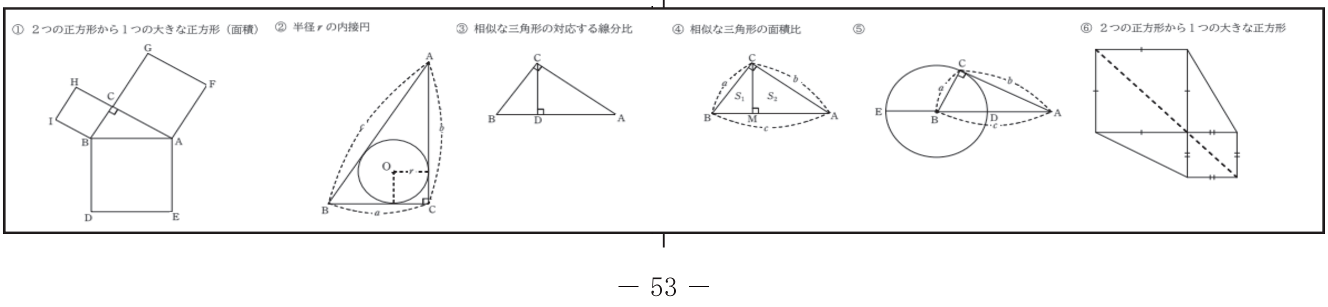
第４時　2024年11月27日（水）の板書



第５時　2024年12月３日（火）

学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》	指　導　上　の　留　意　点
【導　入】 ・前時の［新たな疑問］より、合同な直角三角形を複数使用せずに、三平方の定理を証明する方法を考え、説明できるようになるという本時の目標を確認する。	・時間を費やして三平方の定理の証明に挑戦してきた多くの偉人たちの考えに、より深く触れていくことを伝える。 ・第５時の授業時間50分では、本時の目標を生徒が達成することは難しいと予想していた。そのため、第６時にも引き続くことを前提とし、生徒の学習状況を机間指導で確認しつつ、生徒の学習活動を計画する。
【展　開】	

【学習課題７】 三平方の定理の証明方法①～⑥の全６パターンについて、奇数番号①・③・⑤、偶数番号②・④・⑥の問題を奇数班、偶数班に分かれて考える。また、他班との交流を通して、三平方の定理の色々な証明方法を学び、説明できるようになる。（ジクソー法×ワールドカフェ方式）



（個人探究）10分 ・奇数班、偶数班を設定し、奇数班は①・③・⑤の問題、偶数班は②・④・⑥の問題を優先して考えることを伝え、個人思考する時間とする。 （奇数班、偶数班に分かれて探究）10分 ・奇数班、偶数班で、個人思考した結果を共有する。 《等積変形や合同な三角形を考えることで①は解決できるよ。》 《相似な三角形の面積比は、相似比の２乗だから・・・。》 《方べきの定理を間違って理解していたことに気づいた・・・。悔しい。》 （他班との探究）10分×２ ・各班１人を残し、残り３人は他班へバラバラになるように移動する。（ワールドカフェ方式） ・移動完了後、①～⑥の問題について自分の考えを共有する。 ・元の班に戻り、ワールドカフェ方式で分かれた班の中で話をしたことを共有する。	・ロイロノートを活用し、証明方法の方向性のヒントがかかれた資料を提示し、生徒の思考が分散しないように工夫をする。 ・問題解決まで到達しない班に対して、できるだけ自分たちで解決できるように、机間指導で教師が補助する。   ・問題解決まで到達しない班を机間指導の中で、解決できるように教師が補助する。また、教師から質問をすることで生徒が説明できるようになったか把握する。   
【終　末】 ・本日の授業から分かったことや分からなかったことや、まとめを表現する。	・ロイロノートの付箋機能を使って提出箱へ送信する。 ・次回の授業では、①～⑥について班で探究を深める場面を再度設定すること、結果を学級全体で共有する場面を設定することを伝えておく。

《生徒の振り返り：2023年度授業より抜粋》

A組男子生徒：等積変形や方べきの定理などを活用することによって、三平方の定理につなげることができるとわかった。また、**面積というキーワードが大事ではないか**と思った。

A組女子生徒：三平方の定理は、様々な方法で求められることがわかった。**求め方が分からなかった問題があったのが悔しい**。１つの問題でも様々な考え方があることが今回の授業で改めて認識できた。

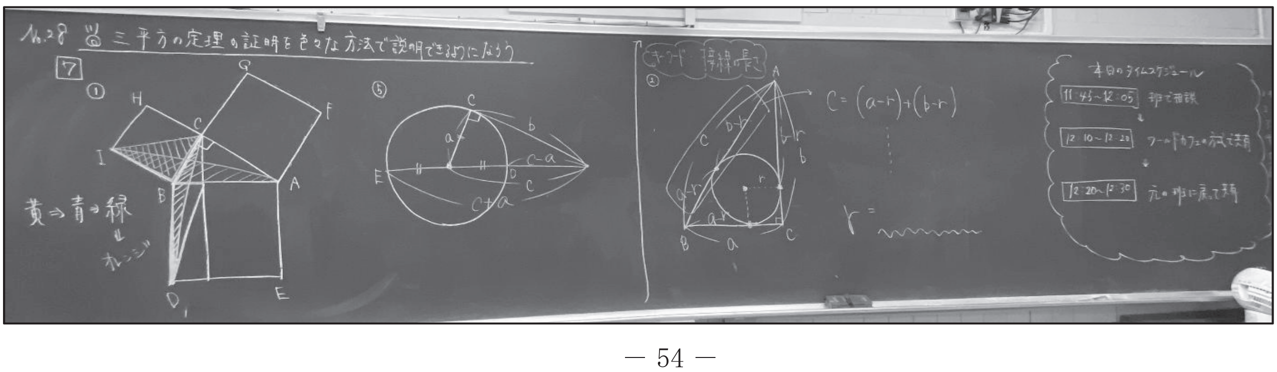
D組男子生徒：前までに学習したことを使って、三平方の定理の証明方法を説明することができたので、**自分に自信がついた**。

D組男子生徒：**①～⑥のどの証明方法も難しかったが、その分やりがいがあり、考えていて楽しかった**。また、他の定理を使って三平方の定理を証明するのは、比較的考えやすいのではないかと感じた。

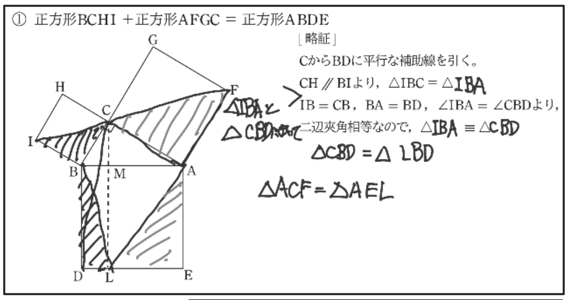
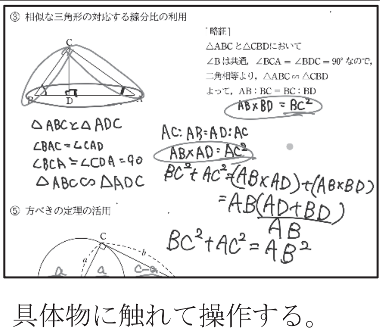
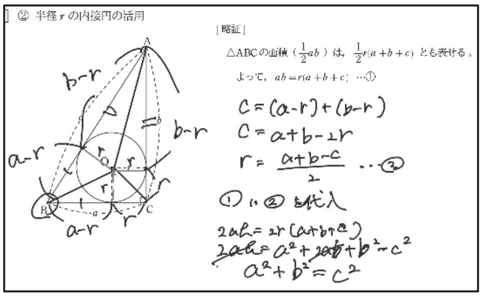
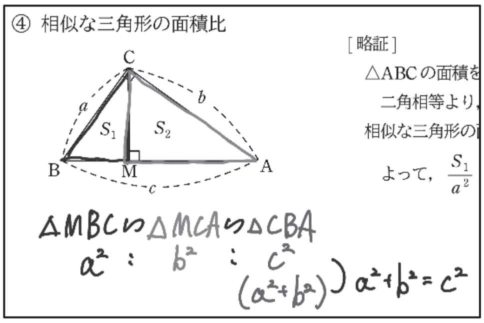
D組女子生徒：⑤の問題の証明で、三角形がかかれてあったため、方べきの定理の使い方を間違えてしまい、認識を改めることができた。**もっと多くの証明方法で三平方の定理を証明してみたい**と思った。

D組女子生徒：三平方の定理の証明方法には数々の方法があり、各方法にも様々な解の導き方があることが自分での考えとワールドカフェを通して知ることができた。今回紹介されていた６つの解き方や今までの授業で考えた解き方の他にも、**自分で三平方の定理の証明方法がないか調べたい**。

第５時　2024年12月３日（火）の板書



第６時　2024年12月10日（火）

学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》	指　導　上　の　留　意　点
【導　入】 ・本時では、問題①～⑥について班で探究を深める場面を再度設定すること、結果を学級全体で共有する場面を設定することを伝える。	・合同な直角三角形を複数使用せずに、三平方の定理を証明する方法を考え、説明できるようになるという前回の授業から継続された本時の目標を確認する。
【学習課題８】 前回の授業に引き続き、問題①～⑥までの三平方の定理の証明方法を考え、班活動を通して自分の言葉で説明することができるようにになろう。また、それをクラスで共有しよう。	
【展　開】 ・前回の授業で考えることができなかった問題を中心に各班で相談し、自分の言葉で説明することができるように文章や数式を使ってまとめる。 《前回の授業では、③について考える時間が足りなかったから、まずはこの問題から班のみんなで取り組んでみよう。》 《①は、図を使って説明することができれば、自分の言葉で補うことができそうだ。》 ・①～⑥の問題をクラス全体に発表する生徒を決め、ロイロノート上でpdfに自分の考え方や説明を書き込みながら発表する。   	・前回の授業で分からなかったことは、ロイロノートの提出箱で確認するように促す。 ・20分～30分程度の時間を与えると、生徒自身の言葉でまとめることができると予想するため、学級全体で共有する活動へと移行する。 ・発表する生徒に教師iPadを貸し出し、ロイロノートの画面配信機能を活用して、各生徒のChromebookの画面上に映し出されるようにする。 ・生徒が発表した内容を黒板に板書しておき、他の生徒が後で見返すことができるようにする。  
・⑥の問題について、具体物に触れて操作する。 《すごい・・・。確かにこの発想であれば、三平方の定理の証明に繋げることができる・・・。》	・芸術家レオナルドダヴィンチが考えた三平方の定理の証明方法の発想に触れる。
【終　末】 ・本日の授業から分かったことや分からなかったことや、まとめを表現する。	・ロイロノートの付箋機能を使って提出箱へ送信する。

《生徒の振り返り：2023年度授業より抜粋》

Ａ組男子生徒：**三平方の定理の証明の仕方が色々あり、面白いと改めて感じた。⑥の問題の芸術家レオナルドダヴィンチが証明したその方法が興味深い。**

Ａ組女子生徒：他の人との解き方が異なる問題があって驚いた。また、前回の授業で解決できなかった問題は、他の人の発表を聞いて理解することができた。**⑥の問題で片方を裏返すという発想が凄い。**

Ｂ組女子生徒：どれも難しくて初見では全然証明を説明することができなかった。しかし、クラスメイトから説明してもらい少しずつ理解することができた。しかし、三角形の面積や相似比など今まで学習してきたことをたくさん利用するので大変だと感じた。

Ｃ組女子生徒：違う班の人の考えや説明を聞くことで自分の班の中だけでは解決できなかったことも理解することができた。また、日にちをおいて考えることで前回の授業では気づくことができなかった新たな発見があった。

Ｄ組男子生徒：**⑥の問題のレオナルドダヴィンチの発想は素晴らしいと感じた**が、自分で考えた証明方法の方が説明しやすいのではないかと思った。

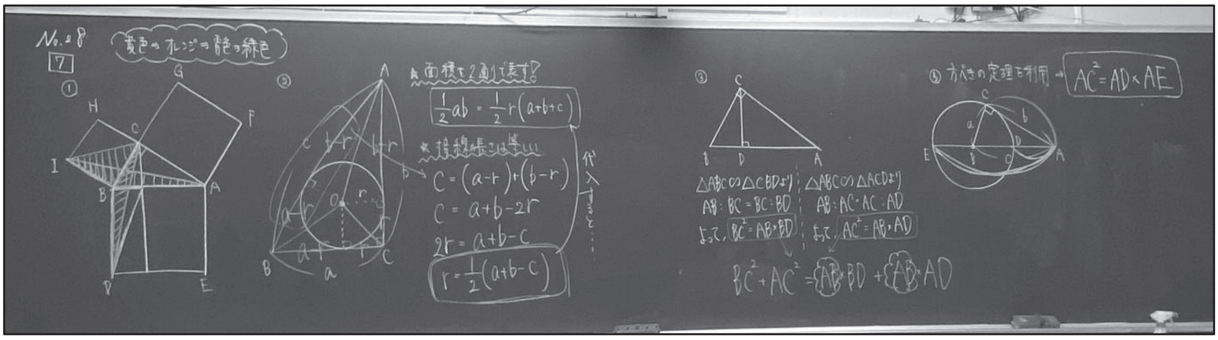
Ｄ組男子生徒：**三平方の定理がたくさん証明できて嬉しい**。このことを知って何になるかはわからないけど、柔軟な発想が世界を変えていくと思う。

Ｄ組男子生徒：たくさんの三平方の定理の証明方法がわかってよかった。やはり、相似の性質や、他の定理を使った証明は比較的考えやすかった。**個人的には、①と②の問題の証明の発想が面白くて好きである。三平方の定理の逆の証明をどのようにするのかが楽しみだ。**

Ｄ組女子生徒：三平方の定理の証明を自分の言葉で説明することができた。でも、言葉が足りなかったり、同じことを何度も言ったりしてしまったのが反省である。また、自分では分からなかった他の問題の証明の仕方を、他の人の説明で理解することができた。

Ｄ組女子生徒：⑥の問題で、実際に図形を触って確かめることで、自分の頭の中が整理され、わかりやすい。

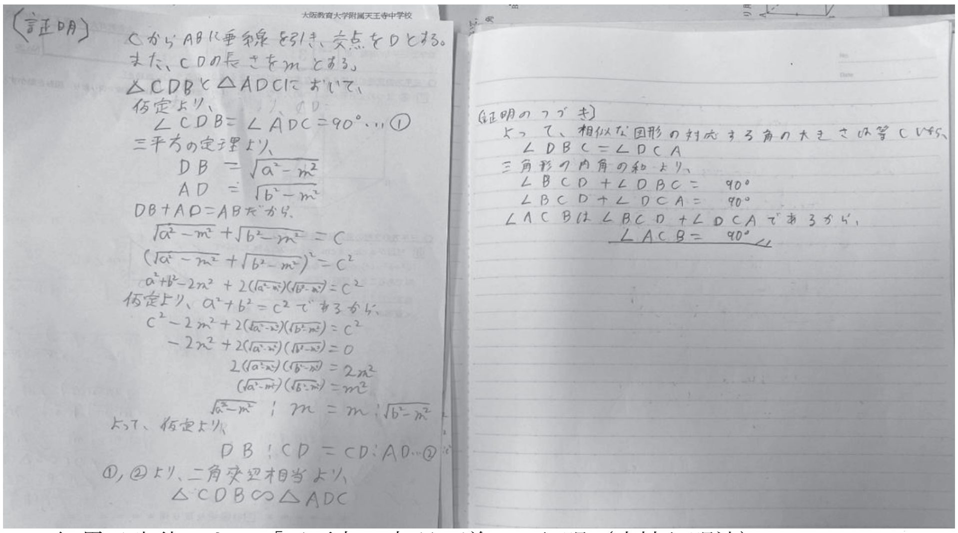
第６時　2024年12月10日（火）の板書



第７時　2024年12月11日（水）

学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》	指　導　上　の　留　意　点
【導　入】 ・「三平方の定理とは、直角三角形の直角をはさむ２辺の長さを a と b 、斜辺の長さを c とすると、$a^2+b^2=c^2$ が成り立つことである。」ことを確認し、「三平方の定理の逆」の証明の必要性を理解する。	・三平方の定理の仮定と結論を改めて確認することで、「次は何を証明するだろうか？」と統合的・発展的な数学的思考を促すための発問を意識する。
【展　開】	
【学習課題９】「三平方の定理の逆」が成り立つがどうかを理解し、ある三角形が直角三角形だと判断できるようになろう。	
・仮定：$a^2+b^2=c^2$ 、結論：∠ＡＣＢ＝90°であることを確認し、証明の方向性を学級全体で共有しつつ確認する。 ・間接証明法で証明を組み立ててかく。 《Ａ組男子生徒：直接証明法によって三平方の定理の逆が成り立つことが証明できました！》	・直接証明法ではない間接証明法（同一法）を知る機会とし、証明の流れを学級全体で確認しながら進める。 ・間接証明法は、生徒にとっては中学１年生で背理法を学習以来であるため、生徒自身で証明をかくことを目的とせず、証明の流れを理解することを目的とする。 ・Ａ組男子生徒が、直接証明法によって、三平方の定理の逆の証明を完成させたため、Ａ組のみ証明を共

	有し、考える時間を設けた。他学級生徒には後日紹介する。


〔証明〕
CからABに垂線を引き、交点をDとする。
また、CDの長さをmとする。
△CDBと△ADCにおいて、
仮定より、
$\angle CDB = \angle ADC = 90^\circ$ …①
三平方の定理より、
$DB = \sqrt{a^2 - m^2}$
$AD = \sqrt{b^2 - m^2}$
DB+AD=ABだから、
$\sqrt{a^2-m^2} + \sqrt{b^2-m^2} = c$
$(\sqrt{a^2-m^2} + \sqrt{b^2-m^2})^2 = c^2$
$a^2+b^2-2m^2+2(\sqrt{a^2-m^2})(\sqrt{b^2-m^2}) = c^2$
仮定より、$a^2+b^2=c^2$であるから、
$c^2-2m^2+2(\sqrt{a^2-m^2})(\sqrt{b^2-m^2}) = c^2$
$-2m^2+2(\sqrt{a^2-m^2})(\sqrt{b^2-m^2}) = 0$
$2(\sqrt{a^2-m^2})(\sqrt{b^2-m^2}) = 2m^2$
$(\sqrt{a^2-m^2})(\sqrt{b^2-m^2}) = m^2$
$\sqrt{a^2-m^2} : m = m : \sqrt{b^2-m^2}$
よって、仮定より、
$DB : CD = CD : AD$ …②
①、②より、二角夾辺相当より、
$\triangle CDB \backsim \triangle ADC$

〔証明のつづき〕
よって、相似な図形の対応する角の大きさは等しいから、
$\angle DBC = \angle DCA$
三角形の内角の和より、
$\angle BCD + \angle DBC = 90^\circ$
$\angle BCD + \angle DCA = 90^\circ$
$\angle ACB$は$\angle BCD + \angle DCA$であるから、
$\angle ACB = 90^\circ$

A組男子生徒による「三平方の定理の逆」の証明（直接証明法）

【終　末】 ・直角三角形かどうか判断する演習問題に取り組む。 ・本日の授業から分かったことや分からなかったことや、まとめを表現する。	・演習問題では、三角形の３辺の長さが与えられているので、斜辺をどのように決定するのかという判断基準を生徒に確認する。 ・ロイロノートの付箋機能を使って提出箱へ送信する。

《生徒の振り返り：2023年度授業より抜粋》

A組男子生徒：間接証明法とは、大変便利なものだと実感した。ますます**自分なりの証明をしてみたくなった**。

A組女子生徒：三平方の定理の逆が証明できると、三辺の長さだけで直角三角形なのかどうかがわかるようになり、分かる**範囲が広がって面白い**と思った。

B組女子生徒：同一法を利用するときは、自分が説明している部分をしっかり理解することが大事だなと思った。また、三平方の定理は三角定規を作るときにも採用されているのかなと少し気になった。

B組女子生徒：三平方の定理の逆を証明するときに間接証明法である同一法を使ったのが新鮮だった。背理法などの証明方法はひらめきにくいのだが、**他にどのような証明方法があるのか知りたい**。

C組男子生徒：三平方の定理の逆を証明するために三平方の定理を用いるのには、疑問の念を抱いたが、納得。

C組女子生徒：三平方の定理の逆を用いて、直角三角形かどうかを調べることができるので、便利だと感じた。

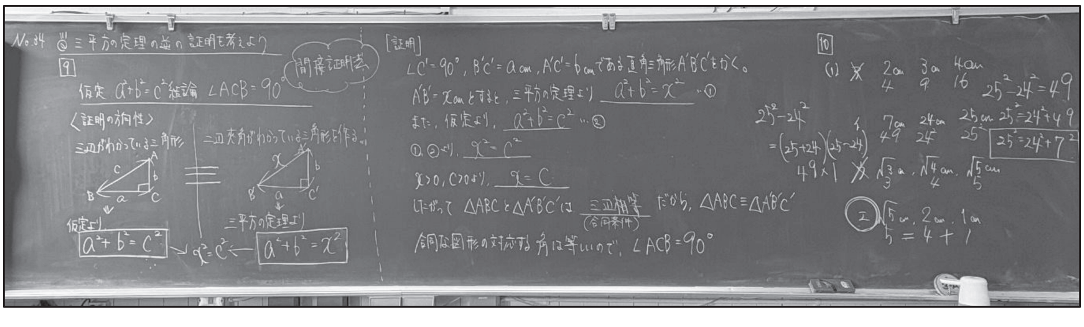
D組男子生徒：**間接証明法が面白かった**。チートみたいな感じだと思った。

D組女子生徒：**三平方の定理の逆の証明の仕方を知ることができて、面白かった**。間接証明法（同一法）という証明の仕方があることを知り、自分でも使えるようにしたいと思った。

D組女子生徒：間接証明法というものがあることを知った。三平方の定理の逆の証明の中で、三平方の定理を使うというのは少し混乱したが、**他の間接証明法の使い方を知りたい**と思った。

D組女子生徒：間接証明法はとてもややこしくて回りくどいけど、わかりやすいと思った。

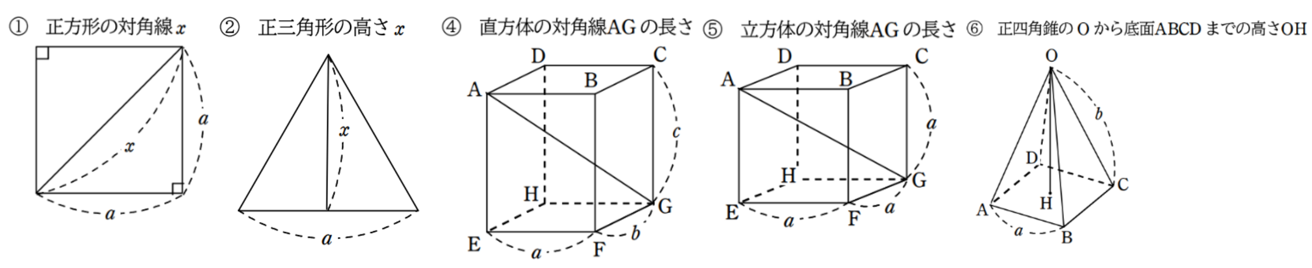
第７時　2024年12月11日（水）の板書



第８時　2024年12月17日（火）

学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》	指　導　上　の　留　意　点
【導　入】 ・三平方の定理を利用することで、色々な長さをもとめることができるようになったことを確認する。 ・平面図形や空間図形における色々な長さを求めることができるようになることが本時の目的であることを確認する。	・具体的な数値が辺の長さとして与えられている問題であれば、解決できる生徒は多いが、周囲の生徒と共有・相談する活動を大切にしたいので、辺の長さについて一般化された図形で考える。
【展　開】	

【学習課題10】 三平方の定理を利用して、平面や空間の色々な長さや面積について文字を使って表現することができるようになろう。



(個人活動) 15分 ・正方形の対角線の長さや、正三角形の高さ、座標平面上の２点間の距離などの平面図形における長さなどを文字式で表現する。 ・直方体・立方体の対角線の長さや正四角錐の頂点から底面までの垂線の長さなどを文字式で表現する。	・本校の生徒の学習状況を考えると、具体的な数値が与えられている場合、三平方の定理を使って色々な長さを求めることは容易であると予想した。そのため、具体的な数値ではなく、文字式で色々な長さを表現することに挑戦させる。そうすることで、平方根の考え方の復習に繋げることができる。
(周囲の生徒と共有・相談する活動) 15分 ・個人活動で得られた結果を周囲の生徒で答え合わせ、共有する場面を設定し、各自で修正を図る。 《平方根の考え方を改めて確認できた。》 《空間図形で三平方の定理が利用できるからこれから便利な定理となっていきそう。》	・周囲の生徒同士で共有・相談する活動によって、生徒同士で解決できるように、机間指導で教師が補助を行う。
(全体共有) 10分 ・平方根の考え方を復習する。また、90°、60°、30°の直角三角形と90°、45°、45°の直角二等辺三角形の３辺の長さについて考える。 ・演習問題に取り組む。	・模範解答は、ロイロノートやClassroomで配信することとし、この場面では机間指導している中で教師が気になった点や学級生徒の課題点を共有することを優先する。 ・この演習問題は、具体的な数値が与えられている問題である。 ・三平方の定理を利用することができるか確認する。
【終　末】 ・本日の授業から分かったことやわからなかったことや、まとめを表現する。	・ロイロノートの付箋機能を使って提出箱へ送信する。 ・授業中の時間だけでは、問題解決できなかった問いについては、次回の授業で確認する。

《生徒の振り返り：2023年度授業より抜粋》

A組男子生徒：直角三角形は、特定の形では比が簡単になることがわかったので、覚えられるものは覚えよう。

B組男子生徒：特徴のある三角形について、辺の比の関係を調べた。**角の大きさに着目して、線分比を活用して問題に取り組みたい**。

B組男子生徒：直角三角形があれば三平方の定理が使えるので、求められる辺の長さが増えた。

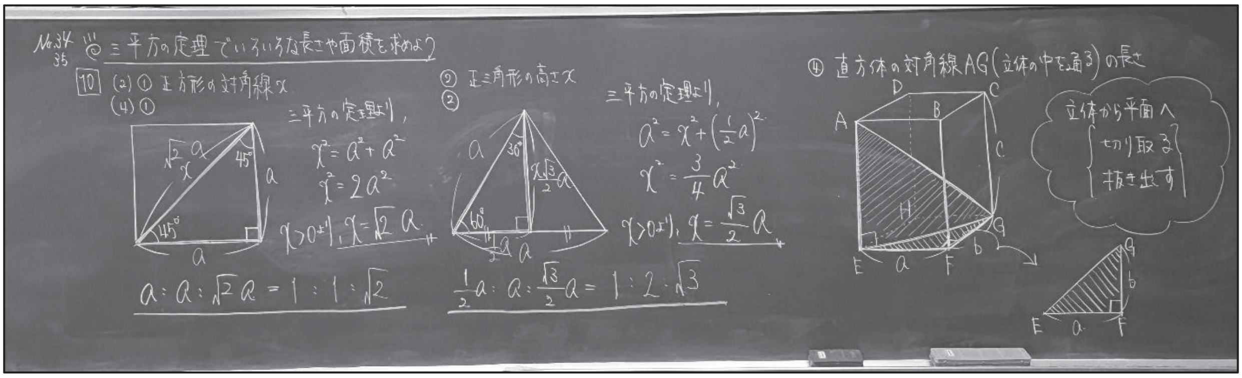
B組女子生徒：三平方の定理によって斜めの長さも求めることができるようになったため、立体図形でも長さを求められるようになって便利だと思った。

C組女子生徒：三平方の定理を使うために90°を作るということを一番に考えて補助線を引けば求めやすいと感じた。その次に、特殊な辺の比の三角形を作れば求めやすいと思う。

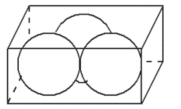
C組女子生徒：角度が特別な三角形の辺の比から長さや面積を求めた。補助線を利用して特別な三角形をつくると辺を求めやすいとわかった。

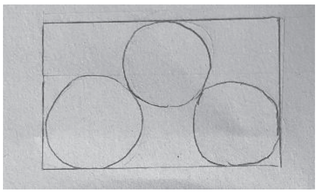
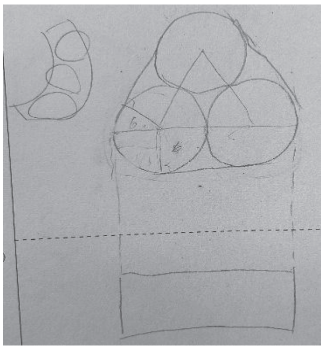
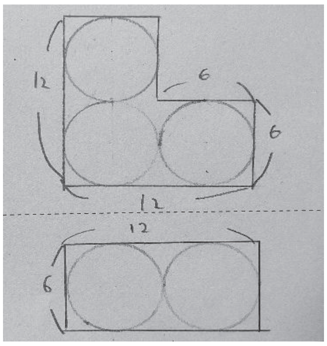
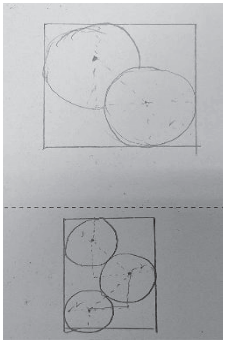
D組女子生徒：**根号の中が、二次の項の和や差で表されている場合、根号を外すことができないということを、今回の授業で再確認**できた。また、その**説明方法が人によって違って面白い**と思った。

第８時　2024年12月17日（火）の板書



第９時　2025年１月14日（火）

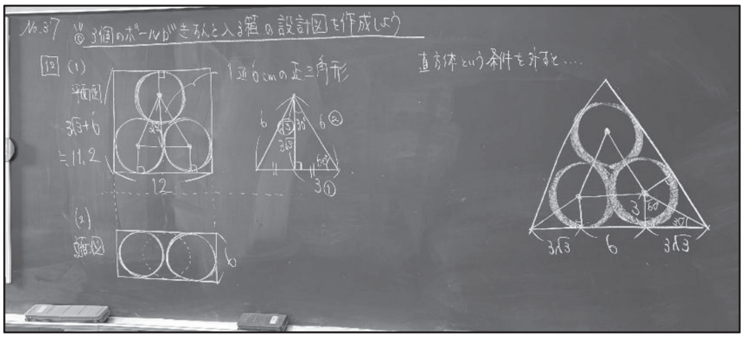
学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》	指　導　上　の　留　意　点
【導　入】 ・授業者の身近な疑問や困っていることを三平方の定理を利用して解決するための課題を設定し、その課題の内容を把握する。  ・授業者があらかじめ作成した箱を見る。	・三平方の定理を身近なものに活用できる課題を設定し、その課題に対して生徒の興味・関心を持たせることができるような場面設定を提示する。 ・授業者があらかじめ製作しておいた箱を生徒に見せることで、完成品をイメージできるようにする。 ・今回は直径約６cmのカラーボールを使用する。
【展　開】 【学習課題11】『３個のボールがきちんと入る箱』の設計図（平面図、立面図）を考えよう。 ただし、３個のボールを横一列（もしくは、縦一列）に配置しないこと。 	
(個人活動) 15分 ・次の①～③の順序で取り組む。 ①３個のボールがきちんと入った状態の箱をイメージし、箱を「上から見た略図（平面図）」と「横から見た略図（立面図）」を記入する。 ②それらの略図から必要な辺の長さ（箱の底面となる縦の長さ、箱の底面となる横の長さ、箱の高さ）を、三平方の定理を利用して求める。 ③箱の展開図の略図を記入する。	・三平方の定理を使わない単純な形は今回除外する。 ・$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.73$とし、辺の長さを求めさせる。 ・箱の展開図の略図には、寸法（実際の長さ）を記入させる。 ・箱の底面となる縦の長さ：$6+3\sqrt{3}$ cm ≒ 11.2cm ・箱の底面となる横の長さ：12 cm ・箱の高さ：６cm

   	
(周囲の生徒と共有・相談する活動) 10分 ・個人活動で考えた設計図を共有する。 (全体共有) 10分 ・箱を「上から見た略図」より、90°、60°、30°の直角三角形を見いだすことができ、箱を製作するために必要な辺の長さについて全体で確認する	・机間指導の中で、生徒のワークシートを写真に収めておき、(全体共有) で使用する。 ・箱のフタについては、省略するようにさせる。 ・空間図形を平面図形に帰着させて捉えることで、平面図形の中に直角三角形を適切に考え、三平方の定理を利用することができるようにする。
【終　末】 ・本日の授業から分かったことや分からなかったことや、まとめを表現する。	・ロイロノートの付箋機能を使って提出箱へ送信する。 ・次回の授業では、実際に箱の製作活動を行うので、持ち物（はさみ・直定規）の連絡を行う。

《生徒の振り返り：2023年度授業より抜粋》

Ａ組男子生徒：**自分だけの世界に１つだけの箱を作るのがとても楽しかった。**
Ａ組男子生徒：**六角柱型の箱を特別な三角形**を用いて自分なりに考え、計算できた。
Ａ組女子生徒：**立体図形で考えるとややこしい課題でも、平面にして考えたら考えやすい**。円の中心から辺に垂線を下すことで直角三角形を作ることが大切である。
Ｂ組女子生徒：三平方の定理を使って箱の設計図を上手く作ることができた。その他にも球の中心を結ぶと90°になるように配置し、**ハート型の箱も構想できた**。
Ｃ組女子生徒：ボールをきちんと収納できる箱の形を考えた。実際に考えた形を作ってみたり、**どの形が一番きちんと収納できるのかを実験したりしてみたい**と思った。
Ｃ組女子生徒：箱について考えた時に私の中ではパッと三角形が思い浮かんだので三角形をかいたが、**友達の設計図を見てみると、様々な形があったので面白いな**と思った。また、三角形の１辺の長さをどうしようか迷っていたが、三平方の定理を使うと求めることができて便利だなと思った。
Ｄ組男子生徒：三平方の定理を身近な生活に活かせるのはすごいな。また、**３個のボールのしまい方一つをとってもたくさんの方法があって面白かった。三平方の定理を応用して問題を考えるのは楽しい**。
Ｄ組男子生徒：３個のボールを**片付けながら、遊びにつながるもの**ができたら良いなと思った。
Ｄ組女子生徒：みんな**様々な箱の作り方があって面白かった。L字型の箱が一番面白いと思う**。
Ｄ組女子生徒：**３個のボールを入れる箱のアイデアが様々で面白かった。３つのボールが入る、最も小さい直方体はどのようなものがあるか調べてみたい**と思った。

第９時　**2025年１月14日（火）の板書**



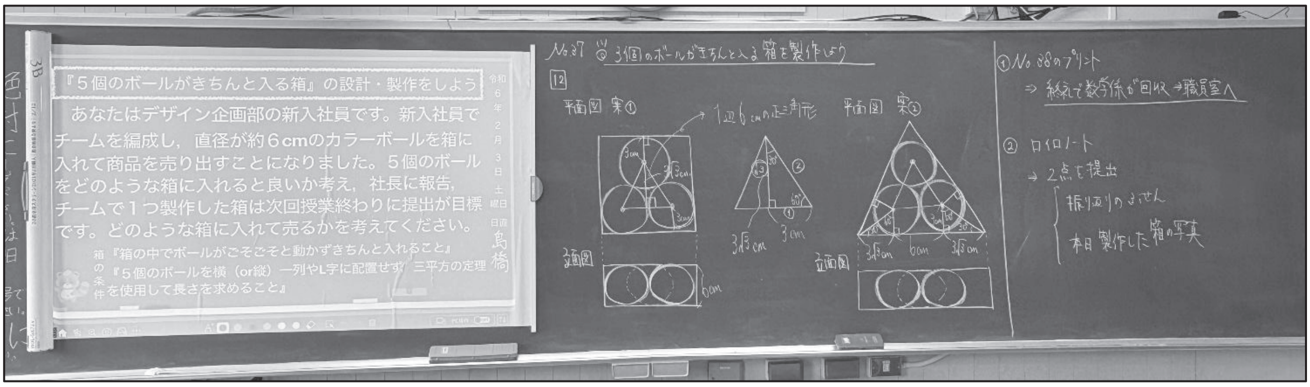
第10時・第11時　2025年１月15日（水）・１月28日（火）

学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》	指　導　上　の　留　意　点
【導　入】 ・前時の『３個のボールがきちんと入る箱』を提示し、前時の内容を復習する。	・『３個のボールがきちんと入る箱』の設計図を作成したとき求めた辺の長さについて復習する。
【展　開】 ・次のパフォーマンス課題を考える。	・前時から継続しているパフォーマンス課題を掲示。

【学習課題12】 あなたはデザイン企画部の新入社員です。新入社員で４人チームを編成し、直径６cmのカラーボールを箱に入れて商品として売り出すことになりました。商品をどのような箱に入れるとよいかを考え、その理由をＳ社長に本日報告、製作した箱は次回提出しなければなりません。どのような箱に入れて売るかを考えてください。製作する箱の条件は『箱の中でボールがごそごそ動かずにきちんと入ること』、『横（or縦）一列にボールを配置せず、三平方の定理を使用すること』の２点です。

学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》	指　導　上　の　留　意　点
(集団探究) ・次の①～⑥の順序で取り組む。 ①４人班でパフォーマンス課題について相談し、箱を「上から見た略図（平面図）」と「横から見た略図（立面図）」を各自の授業プリントに記入する。 ②どのようにカラーボールを入れようと考えたのかという理由を班で相談し、各自の授業プリントに記入する。 ③略図から必要な辺の長さ（箱の底面となる縦の長さ、箱の底面となる横の長さ、箱の高さ）を、三平方の定理を利用して求める。 ④箱の展開図の略図を各自の授業プリントに記入。 ⑤箱の展開図から、考えた箱を実際に製作するため、方眼画用紙に展開図をかく。 ⑥箱を組み立て、５個のカラーボールが入るか確かめる。	・設計図を作るための１人１枚の授業プリントを配布し、パフォーマンス課題の内容を把握させる。 ・方眼画用紙を各班４枚ずつ配布する。 ・セロハンテープを準備する。 ・箱のフタについては、省略させる。 ・三平方の定理を使わない単純な形は今回除外する。 ・第10時で他班と交流する際、生徒の批判的思考を促すためのきっかけとする。 ・図形の計量について、生徒同士で解決できるように、机間指導で教師が補助を行う。 ・$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$、$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$とし、辺の長さを求めさせる。 ・箱の展開図の略図には、寸法（実際の長さ）を記入させる。 ・時間内に⑤まではすべてのチームが到達するようにさせる。 ・各班５個のカラーボールを準備する。 ・『箱の中でボールがごそごそ動かずにきちんと入ること』の“きちんと”とは、近似値による誤差や製作時に生じる誤差まで言及しないこととする。
(全体共有) ・各チームの代表者が、チームで製作した箱（もしくは、考えた箱）について発表する。	・授業時間の都合上、⑥箱の組み立て・完成まで間に合わないチームが出てくると予想できるので、２回分の授業構成とする。 ・５個のカラーボールをどのような箱に入れようと考えたのかという理由にのみ焦点を絞って発表させる。
【終　末】 ・本日の授業から分かったことやわからなかったことや、まとめを表現する。	・ロイロノートの付箋機能を使って提出箱へ送信する。 ・本時の授業プリントを回収する。

第10時・第11時　2025年１月15日（水）・１月28日（火）の板書



第12時　2025年１月29日（水）

学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》	指　導　上　の　留　意　点
【導　入】 ・前時の『５個のボールがきちんと入る箱』を提示し、前時の内容を各班で振り返る。 ・本時では、チームで製作した箱と理由を他班に説明し、批判的思考で意見交流することを伝える。	 ・箱の組み立ての完成まで間に合わない班があると予想されるため、組み立ての時間は確保する。 ・自分のチームが製作した箱と他チームが製作した箱のどちらが良いと考えられるのか、数学的な観点だけでなく、多様な角度から検討し、論理的・客観的な批判的思考をすることが本時の目標である。
【展　開】 【学習課題13】自分のチームが製作した箱と他チームの製作した箱のどれが良いと考えられるのか、多様な角度から検討し、論理的・客観的な批判的思考で、結論を出してみよう。	
・各チームの中から代表者１人が座席に残り、残り３人は他チームへバラバラになるように移動する。 （ワールドカフェ方式：１回目） ⇒　批判的思考で各班意見交流をする。10分 ・移動してきた３人は、先ほどのメンバー、元のチームのメンバー以外と意見交流ができるように、他チームへバラバラになるように移動する。 （ワールドカフェ方式：２回目） ⇒　批判的思考で各班意見交流をする。10分 ・元のチームに戻り、それぞれが話をしたことを共有する。 ⇒　批判的思考で自分のチームの箱の製作理由を分析する。10分 ・ワールドカフェ方式で話をすることで自分のチームの箱の製作理由が良かったのか、自分で振り返りを行う。 ⇒　本時の初めと意見が変わらない or 変わるに関わらず、その理由を論理的・客観的に文章表現する。	・前時に回収した授業プリントを返却する。 ・批判的思考で意見交流するように声をかける。 ・ワールドカフェ方式の２回目の移動を指示する。 ・批判的思考で意見交流するように声をかける。 ・元のチームに戻り、ワールドカフェで話したことを共有するように指示する。 ・批判的思考で意見交流するように声をかける。 ・ワールドカフェ方式で話をしても自分のチームの箱の製作理由が一番良かったと感じた場合は、その理由を論理的・客観的に文章表現する。 ・ワールドカフェ方式で話をした結果、他チームの箱の製作理由が良かったと感じた場合は、その理由を論理的・客観的に文章表現する。
【終　末】 ・本日の授業から分かったことや分からなかったことや、まとめを表現する。	 ・ロイロノートの付箋機能を使って提出箱へ送信する。 ・製作した箱を回収する。

第13時　2025年２月４日（火）

学　習　活　動　《授業中の生徒の様子》	指　導　上　の　留　意　点
【導　入】 ・地球を球とみなして、富士山の頂上から見渡せる範囲を予想し、実際に見渡せる範囲を数学的に考えるという課題の内容を把握する。	・授業者が富士山に登頂したときの写真を見せ、授業者が感じた疑問を本時の課題とし、その課題に対して生徒の興味・関心を持たせる。
【展　開】	
【学習課題14】『三平方の定理を利用して、富士山の頂上から見渡せる範囲を数学的に考えてみよう。	
(個人活動) 15分 ・【学習課題14】を個人で考える。 (周囲の生徒と共有・相談する活動) 10分 ・個人活動で考えた結果を共有する。 (全体共有) 10分 ・個人、周囲で考えた結果を全体で共有する。 ・富士山が見えたとされる実際の新聞記事等を見て、計算した結果との誤差が生まれた理由を考える。	・机間指導の中で、生徒のワークシートを写真に収めておき、(全体共有) で使用する。 ・空間図形を平面図形に帰着させて捉えることで、平面図形の中に直角三角形を適切に考え、三平方の定理を利用することができるようにする。
【終　末】 ・本日の授業から分かったことや分からなかったことや、まとめを表現する。	・ロイロノートの付箋機能を使って提出箱へ送信する。

７．引用・参考文献

［１］E.Ch.Wittmann,「Designing Teaching.The Pythagorean Theorem」,1996,In T.J.Cooney,et al(ed.),Mathematics,Pedagogy and Secondary Teacher Education,Heinemann,pp.1-165
［２］天野　秀樹・真野　祐輔、「三平方の定理を学習する意義に関する一考察－中学生へのインタビュー調査を通してー」、2023、広島大学附属東雲中学校研究紀要、中学教育　第52集、pp.16-27
［３］大谷　由香、2017、「2017年度　報告書　算数・数学　三平方の定理」、島根大学教育学部付属義務教育学校後期課程、https://www.shimane-fuzoku.ed.jp/wp/wp-content/uploads/2020/02/0587173e57122698f279aca5655c87dc.pdf
［４］形川　恵、「操作活動による定理発見の学習指導について-円周角の定理と三平方の定理-」、1981、日本数学教育学会誌　第63巻　第３号、pp.54-60
［５］米田　重和、「「指導デザイン」をもとにした三平方の定理の教材に関する実践的研究」、2009、日本数学教育学会誌　第91巻　第１号、pp.24-31
［６］相馬　一彦ほか、「数学の世界３」、2020、大日本図書
［７］武内　章、「教育科学 数学教育２月号」、2004、明治図書
［８］中川　裕之・油井　幸樹、「「三平方の定理とその証明」において課題探究として証明することの授業化」、2014、日本数学教育学会誌　第96巻 第９号、pp.30-33
［９］森下　四郎、「新装版 ピタゴラスの定理100の証明法-幾何の散歩道-」、2021、プレアデス出版
［10］文部科学省、「中学校学習指導要領（平成29年告示）解説数学編」、2017
［11］渡辺　勝行・有藤　茂郎・岩崎　浩、「三平方の定理の発見と証明の接続を図る授業デザインの開発研究-数学的活動の日常化に向けたアプローチ-」、2012、全国数学教育学会誌　数学教育学研究 第18巻 第２号、pp.123-138

Learning the Pythagorean Theorem through Discovery, Proof, and Application

― A Unit Design Based on Activities Grounded in an Operational Principle ―

SHIMAHASHI Shogo

Abstract: In this study, we redesigned learning of the Pythagorean Theorem as a sequence of mathematical activities ― “discovery → proof → application” ― and designed the entire unit around activities grounded in an operational principle. We coded reflective writings from 144 ninth-grade students at our school using five analytic categories (A–E). The results indicated that, in Sub-conclusion I, students’ reflections centered on organizing conditions and reasoning backward; in Sub-conclusion II, on structuring proofs and the necessity of explanation; and in Sub-conclusion III, on integrating prior knowledge and attending to validity (e.g., error and optimization). These findings suggest that using an operational principle as the unit’s central axis may promote coherent connections among discovery, proof, and application.

Key Words: Pythagorean Theorem, operational principle, proof, mathematical activities, Jigsaw method, World Café