

見える世界を数学的に解決する資質・能力の育成

－第70回教育研究会 教科報告－

しまはし しょうご 島橋 尚吾 (中学)・おおいし あきのり 大石 明德 (高校)

I. はじめに

令和5年度教育研究会における中高数学科の教科テーマは、「見える世界を数学的に解決する資質・能力の育成」と設定した。教育研究会の教科テーマの一部である「見える世界」とは、現実世界の問題や数学的文化史などを指している。また、教科テーマの内容は、昨年度の数学科の取組みの1つである「附属天王寺中高数学科として生徒に育みたい9つのコンピテンシー」の内容を基盤とした。その9つのコンピテンシーの中から、教育研究会の教科テーマに沿った内容を表1のように厳選した。表1の①～④の学習過程を繰り返すことができる「見える世界」を生徒に提示し、事象を数理的に捉えさせる。そして、捉えた数学的事象を自立的・協働的に解決しようとする生徒の資質・能力の育成を目指し、授業のカリキュラムを考案する。

表1 附天中高数学科の生徒に育みたいコンピテンシー

- | |
|---|
| ①数学（定理・公式・性質等）を組合せ、駆使すれば解決できそうな形に、問題を理想化できる。
②実際に数学を適用し、解を導くことができる。
③解として相応しいか否かを判断できる。
④相応しいと判断したならば、①～③までのプロセスを、数・文字・式を用いて説明できる。 |
|---|

II. 中学校の授業実践の記録

(1) 授業実践の概要

中学校学習指導要領（平成29年告示）解説数学編では、「具体的な事象の中から二つの数量を取り出し、それらの変化や対応を調べることを通して、関数関係を見だし考察し表現する力を3年間にわたって徐々に高めていくことが大切である」と示している。特に中学校2年生においては、関数関係の特徴を表、式、グラフを相互に関連付けて考察する力を養うことが重要であるとされている。実際、本校が採択している検定教科書（大日本図書、2020）では、初めに二つの数量の関係を表に表し、その表を基に変化の様子を調べ、対応のきまりを見だし、それを式で表現する活動が設定されている。次

に、式を基に表を作って変化の様子を調べ、式から変化の割合を求め、さらに、表や式を基にグラフをかくという活動へとつながる。表、式、グラフを相互に関連付けて関数の特徴を考察する力を伸ばすことを意識された教科書の構成であることが伺える。しかし、教科書には関数領域の学習内容の中に、直線と放物線の交点に関する問題や、図形の面積を求める問題など、本来は解析幾何の内容にあたる問題が含まれている。また、そのような解析幾何の問題も高校入試で多く出題されている実情がある。そのため、解析幾何の指導方法の在り方について研究を進めるべきではないかと考えた。そこで、今回注目した題材は、紙を折ったりしてできる折り線や点などの折り紙の基本的な性質から数理を探究する科学のORIGAMICS（オリガミクス）である。生徒は幼少期に折り紙に親しんでいて、誰しも一度は手にしたことがあるだろう。しかし、そのときの折り紙とは、鶴などの遊戯的な折り紙であり、芸術の視点から見つめているものに過ぎない。紙を折るという操作を数学的な視点から見直すことは、生徒にとって新しい発想に繋がることを期待している。また、紙を折ることによってできた折り線などを直線や交点と捉え、折り紙を座標平面とみなすことで、中学2年生で学習している関数領域の指導に繋げることができると考えた。

(2) 授業実践の指導計画

全5回の指導計画で、表2の通り授業実践を行う。このうち、教育研究会は第3時の授業公開を行った。

表2 指導計画

日程	授業内容
11月8日(水)	折り紙（正方形）の面積の $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{8}$ となる正方形の折り方の探究
11月9日(木)	2直線の垂直条件や 中点の座標の求め方について
11月11日(土)	(本時)『芳賀の第1定理折り』の探究①
11月16日(木)	『芳賀の第1定理折り』の探究②
11月21日(火)	『芳賀の第1定理折り』のまとめ

（3）研究会当日の本時の流れ

本時では、『芳賀の第1定理折り』の折り方について教師が演示する。それと同時に、生徒は1人1枚の折り紙を使って生徒自身の手で折る活動を行う。その活動でできた点を全体で確認し、その点の座標を求めることで、三等分点だと理解することが本時の終着点であると伝える。しかし、それだけでは生徒の理解は得られないため、図1のように思考過程のロードマップを黒板に提示し、第1時・第2時で学習したことを引き出しやすくなる仕掛けを行う。

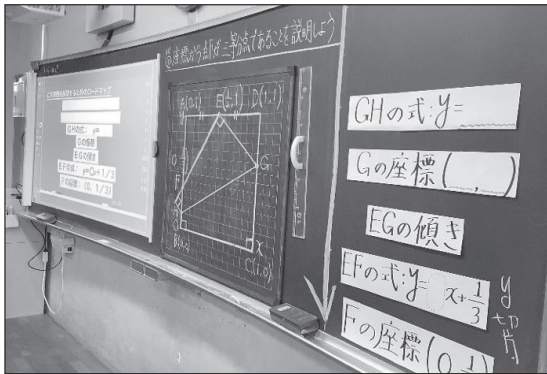


図1 思考過程のロードマップの板書

生徒は提示されたロードマップを思考の拠り所として、折り紙を座標平面として捉え、1次関数を用いることで課題解決に向かうことになる。また、4人班のグループワーク形式で、課題についてお互いに相談し合いながら自立的・協働的に解決させる。

（4）研究会当日の生徒の反応・生徒の振り返り

図2にあるCEを補助線として考える必要があるため、生徒は個人で思考を巡らせていた。机間指導で、CEに補助線を引いている生徒を見つけ、班内で共有するように授業者から声掛けした。すると、折り紙の基本的な性質や、 $\triangle GEC$ が $GE=GC$ の二等辺三角形であることや、凾形の図形などから、折り線GHはCEの垂直二等分線であることに生徒自身で気づくことができた。そして、CEの中点の座標を求め、CEの傾きから2直線の垂直条件を用いて直線GHの式を表現するこ

とでロードマップに従い、班内で相談をしながら点Fの座標を求めることができた。

また、図3のように、折り紙を座標平面と捉えて『芳賀の第1定理折り』を証明したいという自立的な学習に向かった生徒の姿もあり、本時の目的を自ら達成しようとしていた様子が見受けられた。

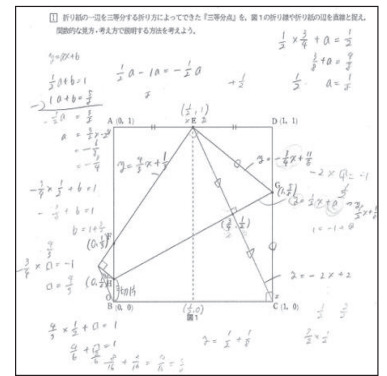


図2 生徒の授業プリント①

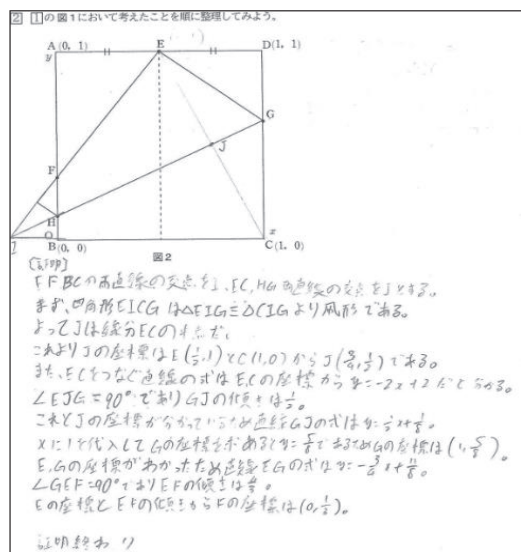


図3 生徒の授業プリント②



図4 研究会当日の様子

また、研究会当日の生徒の振り返りの一部（表3）を抜粋してまとめる。

表3 研究会当日の生徒の振り返りの一部

- ・『芳賀の第1定理折り』は、偶然のように思えたものだが、数学的な証明が可能なことに驚いた。他の偶然に近い例などもあれば証明したい。
- ・今までに習った（求めた）手法を使って説明できて楽しかった。
- ・三等分点の証明ができたときに感動した。色々な線を求めて、最終的に答えが出る構造がすごく面白かった。
- ・「座標が分かる→式が分かる」と連鎖していくのが面白かった。また、補助線を引くことを自分で思い出すことができなかった。
- ・自分で作った点Iの座標は求まっていたのに、点Gのx座標が1であることで傾きを算出できるという発想に至れなかった自分が悔しかった。
- ・これまでの折り紙や1次関数の授業で一番難しい問題だった。しかし、解けたときの達成感があった。 $\triangle AEF$ の $\triangle BGF$ を使っても求められた。

Ⅲ. 高等学校の授業実践の記録

(1) 授業実践の概要

<p>〈図2-1: 傾斜式歪み絵〉</p> <ul style="list-style-type: none"> 座標空間・座標平面 2点間の距離 三角比, 三角関数 平面ベクトル 直線の媒介変数表示 2直線の交点 <p>[数学2-1]</p>	<p>〈図2-2: 円柱鏡式歪み絵〉</p> <ul style="list-style-type: none"> [数学2-1] 空間ベクトル 空間の直線の媒介変数表示 直線と座標平面の交点 空間ベクトルの内積 平面の法線ベクトル 入射ベクトルから反射ベクトルを得る 接平面と法線ベクトル 直線と円の交点の個数 直線と円の交点の座標 <p>[数学2-2]</p>	<p>〈図2-3: 円錐鏡式歪み絵〉</p> <ul style="list-style-type: none"> [数学2-1] 平面ベクトルの内積 行列・1次変換 2次の正方行列と回転移動 3次の正方行列と回転移動 直線の法線ベクトル 入射ベクトルから反射ベクトルを得る 直線と座標平面の交点 (↑ [数学2-2] より) <p>[数学2-3]</p>	<p>〈図2-4: 球面鏡式歪み絵〉</p> <ul style="list-style-type: none"> 球面の方程式 直線と球面の交点の個数 直線と球面の交点の座標 球面の法線ベクトル 入射ベクトルから反射ベクトルを得る 直線と座標平面の交点 (↑ [数学2-2] より) <p>[数学2-4]</p>

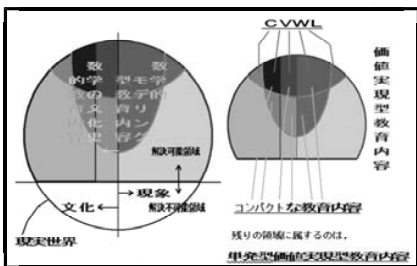
〈画像 1-1〉 歪み絵の制作 (1994 年度、筆者構築) ↑

※ “カラーの写真・画像” は生徒作品を、“[数学0-□]” 欄の項目は生徒が用いた数学・創った数学を表している。↑

<p>〈図3-1: 対称・拡大縮小文様〉</p> <ul style="list-style-type: none"> 座標平面 三角比, 三角関数 種々の曲線 (陰関数型) 種々の曲線 (媒介変数表示型) 平行移動・対称移動 拡大縮小変換 <p>[数学3-1]</p>	<p>〈図3-2: 回転文様〉</p> <ul style="list-style-type: none"> 行列・1次変換 媒介変数表示型曲線の回転移動 行列式・逆行列 陰関数型曲線の回転移動 <p>[数学3-2]</p>	<p>〈図3-3: 丸め変換単位文様〉</p> <ul style="list-style-type: none"> 三角関数 種々の曲線 (媒介変数表示型) (↑ [数学3-1] より) 丸め変換 <p>[数学3-3]</p>	<p>〈図3-4: シダの葉〉</p> <ul style="list-style-type: none"> 拡大縮小変換 (↑ [数学3-1] より) 平面ベクトル 固有値, 固有ベクトル, 固有方程式 2次の正方行列の対角線化 <p>[数学3-4]</p>

〈画像 1-2〉 文様の数学 (2000 年度、筆者構築)

※ “[数学0-□]” 欄の項目は生徒が用いた数学・創った数学を表している。↑



〈画像 1-3〉 附属天王寺中・高型 STEAM(?)

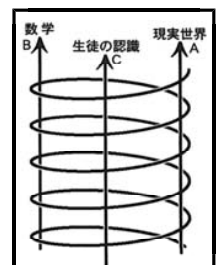
に示す教育内容は、〈画像 1-3〉の中の「数学の文化的教育内容」の具体例である (文様の数学(〈画像

左図〈画像 1-3〉は「“本学附属天王寺中・高等学校” 型の STEAM」を図示したものである (詳細未定)。また、上段の 2 つの図 “〈画像 1-1〉〈画像 1-2〉”

1-2) の方は「数学的モデリング型教育内容」と見ることもできる。

さらに記しておくが、〈画像 1-1〉〈画像 1-2〉の教育内容は「コンパクトな教育内容」(〈画像 1-3〉参照) でもあり、よってこれ等は右図〈画像 1-4〉の形をもとっている (詳細略)。

今回は『各生徒が〈図 3-2〉のような花文様を作り、それを歪めて〈図 2-2〉タイプの歪み絵を制作する』授業実践を行った。



〈画像 1-4〉

（2）授業実践の指導計画

[1学期] 授業数：5時間

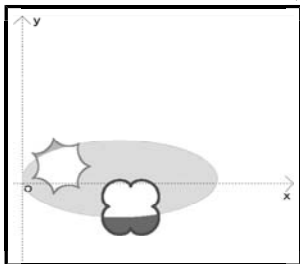
対象：本校第Ⅱ学年A B C D組生徒（150人）

概要：各生徒に〈プログラム 2-1〉（実行結果は〈画像 2-2〉）を与え、これを改変させて“オリジナル花卉1枚”を出力するプログラムを制作させる（〈画像 2-3〉は、筆者による改変結果（以下“改変プログラム”と略記）の実行結果）。

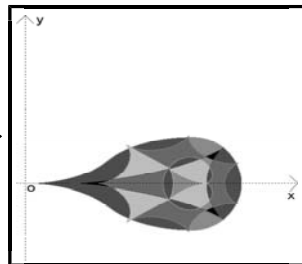
```

100 !*****<初期設定>*****
110 CLEAR
120 SET BITMAP SIZE 1016,662
130 SET WINDOW -500,500,-326,326
140 LET d=3.14159/180
150 !*****<交点座標軸>*****
160 SET LINE COLOR 1
170 SET LINE STYLE 3
180 PLOT LINES:-500,0:500,0
190 PLOT LINES:0,326:0,-326
200 SET LINE STYLE 1
210 PLOT LINES:500,0:485,15
220 PLOT LINES:500,0:485,-15
230 PLOT LINES:0,326:-15,311
240 PLOT LINES:0,326:15,311
250 SET TEXT COLOR 1
260 SET TEXT FONT"MS明朝",20
270 PLOT TEXT,AT 480,-35:"x"
280 PLOT TEXT,AT 20,306:"y"
290 SET TEXT FONT"MS明朝",20
300 PLOT TEXT,AT 2,-20:"o"
310 !*****<花・茎・葉の描画>*****
320 SET POINT COLOR 27
330 SET POINT STYLE 1
340 FOR th=0 TO 360 STEP 0.01
350 LET x=180*COS(th*d)+180
360 LET y=75*SIN(th*d)+10
370 PLOT POINTS:x,y
380 NEXT th
390 SET POINT COLOR 4
400 SET POINT STYLE 7
410 FOR th=0 TO 360 STEP 0.1
420 LET x=(40+th)*COS(th*d)-10*COS((40+th)/10)*th*d+200
430 LET y=(40+th)*SIN(th*d)-10*SIN((40+th)/10)*th*d-45
440 PLOT POINTS:x,y
450 NEXT th
460 SET POINT COLOR 18
470 SET POINT STYLE 6
480 FOR th=0 TO 360 STEP 0.05
490 LET x=(56+th)*COS(th*d)+4*COS((56+th)/8)*th*d+70
500 LET y=(56+th)*SIN(th*d)-4*SIN((56+th)/8)*th*d-35
510 PLOT POINTS:x,y
520 NEXT th
530 SET AREA COLOR 77
540 FLOOD 60,70
550 SET AREA COLOR 73
560 FLOOD 180,40
570 SET AREA COLOR 128
580 FLOOD 200,-75
590 END
    
```

〈プログラム 2-1〉



〈画像 2-2〉
〈プログラム 2-1〉の実行結果

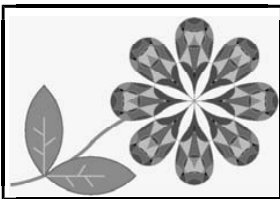


〈画像 2-3〉
改変プログラムの実行結果

[2学期] 授業数：7時間

対象：本校第Ⅱ学年A B C D組生徒（150人）

概要：1学期に制作した“オリジナル花卉1枚”（以下“花卉1枚”と略記）を、各生徒が回転させそれに茎と葉を付ける。この作業を〈画像 2-3〉を以て説明するならば、「改変プログラムを発展させ、〈画像 2-4〉のような画像を出力するプログラムを制作する」ということになる。なお、“回転移動の変換式”は次の通りである。



〈画像 2-4〉プログラム“花卉1枚”を発展させたもの

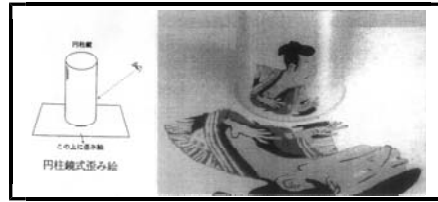
点 P (x, y) を原点を中心に角の大きさ θ だけ回転させて得られる点 P' の座標 (x', y') は以下である。

$$\begin{aligned}
 x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\
 y' &= x \sin \theta + y \cos \theta
 \end{aligned}$$

[3学期] 授業数：3時間

対象：本校第Ⅱ学年A B C D組生徒（150人）

概要：「円柱鏡式歪み絵」とは、〈画像 2-5〉に示すようなものである。生徒は“各自の〈画像 2-4〉にあたる作品”



を湾曲化させ“円柱鏡式歪み絵”を制作するが、そのためには彼等は原画（各自の

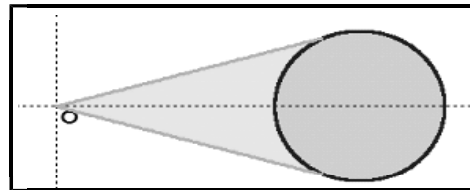
〈画像 2-5〉：「円柱鏡式歪み絵」とは 〈画像 2-4〉にあたるものを湾曲化させる変換式（以下“歪み絵変換式”と略記）を導出しなければならない。

この段階の（即ち、3学期段階の）授業展開については、割愛させて頂き稿を改めたい。

（3）研究会当日の授業

対象：本校第Ⅱ学年B組生徒（37人）

概要：“花卉1枚”を回転させる作業は、いずれの生徒にとっても簡単なものではない。その作業に入る前に、花卉に似た簡単な図形を回転させることにした。その図形とは〈画像 3-1〉であり、これを出力するプログラムは〈プログラム 3-2〉である。つまり「このどこかに“回転移動の変換式”（〈画像 2-4〉の右下）を入れ且つ必要な箇所に変更を加える」---*と当該図形は回転するのである。この“作業*”を彼等にさせる（即ち、“プログラミング”による図形の回転の練習をさせる）ことをこの授業の柱とした。また、この授業中に回転の練習を終わらせた生徒には「自分の“花卉1枚”の回転に着手する」よう伝えた。



〈画像 3-1〉：花卉に似た簡単な図形

```

!*****<初期設定>*****
CLEAR
SET BITMAP SIZE 1016,662
SET WINDOW -500,500,-326,326
LET d=3.14159/180
!*****<交点座標軸>*****
SET LINE COLOR 1
SET LINE STYLE 3
PLOT LINES:-500,0:500,0
PLOT LINES:0,326:0,-326
SET LINE STYLE 1
PLOT LINES:500,0:485,15
PLOT LINES:500,0:485,-15
PLOT LINES:0,326:-15,311
PLOT LINES:0,326:15,311
SET TEXT COLOR 1
SET TEXT FONT"MS明朝",20
PLOT TEXT,AT 480,-35:"x"
PLOT TEXT,AT 20,306:"y"
SET TEXT FONT"MS明朝",20
PLOT TEXT,AT 2,-20:"o"
!*****<輪郭線の描画>*****
SET POINT STYLE 6
SET POINT COLOR 2
FOR th=180 TO 180 STEP 0.5
LET x=70*COS(th*d)+250
LET y=70*SIN(th*d)+0
PLOT POINTS:x,y
NEXT th
SET AREA COLOR 24
FLOOD 250,50
SET POINT COLOR 56
FOR t=0 TO 1 STEP 0.01
LET x=0+218*t
LET y=0+63*t
PLOT POINTS:x,y
NEXT t
FOR t=0 TO 1 STEP 0.01
LET x=0+218*t
LET y=0+63*t
PLOT POINTS:x,y
NEXT t
SET AREA COLOR 17
FLOOD 160,35
END
    
```

〈プログラム 3-2〉

（4）生徒の反応

◎“回転移動の変換式”（〈画像 2-4〉の右下）の導出については、“ベクトル”を用いる方法と“加法定理”を用いるそれとの2通りを紹介したが、その場の様子だけでは、彼等がそれ等を理解したかどうかとも感じ取れなかった。◎彼等は十分に試行錯誤をくり返したと思われるが、〈画像 3-1〉を回転させるに至った生徒の数はごく少数であった。

IV. 研究協議会の記録

授業後に行われた研究協議会は、今年度は50分で実施した。研究協議会の内容について簡潔に記載する。

（1）司会・授業者・指導助言者紹介

中学校授業者 本校教諭 島橋 尚吾
高等学校授業者 本校教諭 大石 明德
司会者 本校教諭 武部 真子
指導助言者 大阪大谷大学教育学部教育学科准教授
竹歳 賢一 先生

（2）教科テーマ・中高授業について

この内容は、本稿「Ⅰ. はじめに」、「Ⅱ. 中学校の授業実践の記録」、「Ⅲ. 高等学校の授業実践の記録」に記載した通りである。

（3）質疑応答（時間の都合上、質問は5つのみ）

① 中学校で解析幾何が重要であることは理解できるが、関数概念の定着があいまいな中学校2年生の実践は本当に必要なのか。

→ 中学校2年生での解析幾何の授業実践は挑戦である。中学3年生と並行して研究を進めており、発達段階や学習状況から中学2年生では難しいことが浮き彫りになってきた。しかし、中学3年生には可能であると感じる。

② ロードマップは果たして必要なのだろうか。

→ 他のクラスでは、ロードマップを減らして生徒に示した。しかし、生徒の理解は促されなかった。中学3年生における平面幾何の論証や平方根の指導等の重要性が今回の実践を通してよくわかった。

③ 生徒はどのあたりまで理解しているのか。例えば、折り紙の折れ線がCEの垂直二等分線であることは理解できているのだろうか。

→ 中学校1年生で学習した平面図形では理解できている様子であった。しかし、折り紙（＝具体物）に落とし込むと、理解できない生徒が多いようだ。具体物に落とし込んで考えさせることが重要であると改めて実感した。

④ CEと折れ線とが垂直二等分線の関係になっていることを途中で示しても良かったのではないか。

→ そのような方法も検討していたが、授業中の生徒の様子を見て、机間指導することに専念することにした。

⑤ 論証をしようとしている生徒がおり、その生徒は折り紙の中に凧型を見いだしていた。このような生徒に対しては、どのように指導するべ

きか。

→ 折り紙の探究という本質からずれてしまうことが予想されるので、机間指導をしている中でその生徒に対して丁寧に方向性を確認するべきである。

（4）指導助言者の講話について

＜中学校の公開授業に対して＞

関数と解析幾何が入混じりしている中学校学習内容であるため、今回の授業実践の取り組みについて共感した。また、授業中に、生徒の思考過程をロードマップに示すことは、生徒の実情に応じた授業展開であり、理解できた。

＜高等学校の公開授業に対して＞

加法定理の指導においては、定理の証明と演習に終始している学校が多くある。この点において、実を伴う実践であった。

＜STEAM教育について＞

TIMSS（2019）の結果、我が国の児童・生徒の科学・数学的リテラシーは世界において上位に位置している。しかし、「勉強は楽しいか」については、国際平均を下回っている。高い水準で知識を身につけているが、「楽しい」とは思っていない。この現状を改善するための手段としてSTEAM教育がある。STEAM教育とは、Science・Technology・Engineering・Art・Mathematics等の各教科での学習を実社会での問題発見解決に活かしていくための教科横断的な教育のことである。問題発見から問題解決の一連の実践力を養成する教育の必要性がある。STEAM Competency、STEAMモデリング・サイクルの2つから、STEAM教育を定義しなおすことを提案している。

＜数学の文化史について＞

オリガミクス、円柱鏡式歪み絵だけではなく、時計も数学の文化史の1つである。（水時計・日時計など、セイコーミュージアム銀座に展示されている）日時計には、赤道型・鉛直型・水平型があるが、赤道型日時計を用いたコンパクトな実践がある。守屋実践では、塩竈神社の日時計について、緯度・経度をもとに長崎・出島で使われていたものに一致することを突き止めた。また、四天王寺と法隆寺、バルコニーの柵が帯模様になっている。代数的には群論の性質ともいえる。中国の三大石窟寺院の模様とも一致している。中国から日本に輸入されたと考えることもできる。

＜附属天王寺型STEAM教育の提案＞

伝統的研究の継承を意識しつつ、オリジナリティのある発展した研究を行うことで、他の学校

現場への研究成果の還元を行うことができる。そのための観点として、次の事柄を意識すると良い。

- ・数学の文化史
- ・数学的モデリング
- ・価値実現活動
- ・生活向上・社会貢献に向かう態度
- ・ICT活用（CVWL）

V. 今後の展望

（1）中学校授業者より、授業の反省と今後の展望

今回の授業実践の反省点として、中学2年生の学習内容や発達段階を踏まえると、生徒にとって難易度の高い課題だったのではないかということである。本校では代数・幾何の2つ分野に分けて同時並行で授業を進めているため、幾何分野の論証問題による論理的な数学的思考が生徒に少しずつ定着しているだろうと授業者は予想をしていた。しかし、生徒にとっては数学の授業が代数・幾何に分けられているのに対し、それらが混じり合うような課題だったので、混乱が生じた場面も見受けられた。一方、同時期に中学3年生を対象として同内容の授業を実施したところ、中学2年生よりも深い探究を進めることができた。

今後の展望としては、中学2年生と3年生の授業を受けている生徒の様子や、それぞれの振り返りなどを比較分析し、中学生における解析幾何の指導方法の在り方を検討し、論文等にまとめていきたい。

（2）高等学校授業者より、授業の反省等

正直なところ、今回の授業については反省点を見出すことができない。生徒にしばしば見られる傾向は、「数学的な事柄を理解できても、それをプログラミングに反映させることが困難だ」というものであり、今回の授業でもそのような空気は強く感じられた。しかし、そのような困難は常に「アクティブラーニング」により乗り越えさせており、今回の授業中に〈画像 3-1〉を回転させられなかった生徒達もいずれは解決に至るであろう（筆者が本稿を制作している現時点において、既に全高Ⅱ生が完成度の高い“茎葉付きの花一輪”を完成させている）。

VI. 引用・参考文献

- [1] 相馬 一彦ほか、「数学の世界2」、2020、大日本図書
- [2] 文部科学省、「中学校学習指導要領（平成29年告示）解説数学編」、2017