様々な数におけるマンデルブロ集合に対応した集合について

～二重数や分解型複素数ではどうなるのか～

On sets corresponding to Mandelbrot sets in various numbers

- What happens in dual numbers and decomposable complex numbers? -

Abstract（In English）

The Mandelbrot set M is {c | $\{z_n\}$:$z_0 = 0, z_{n+1} = (z_n)^2 + c$,does not diverge}.
In general, the range of c is restricted to complex numbers, but in this study, the range of c is extended to split-complex number and dual numbers. We made predictions about the properties of the sets that correspond to those Mandelbrot sets by plotting points using Python and proved.

1. はじめに

複素数とは一般に二乗して-1 になるような虚数単位 i を用いて a+bi(a,b は実数)と表せる数のこと言うが、二重数(dual numbers)は二乗して初めて 0 になるような虚数単位 ε(≠0)を用いて a+bε,分解型複素数*(split-complex number)は二乗して初めて 1 になる虚数単位 j(ただし j≠±1)として用いて表せる数のことである。また、マンデルブロ集合とは、$M = \{c|z_0 = 0, z_{n+1} = (z_n)^2 + c$で定まる$\{z_n\}$が発散しない}で定まる集合である。

本研究は、本来は複素数にて定義されるマンデルブロ集合を、二重数と分解型複素数*という他の二元数において定義した場合はどのような集合になるのかを明らかにすることを目的とする。

2 数値実験

マンデルブロ集合に含まれる点をガウス平面**プロットする Python によるコードを用いてマンデルブロ集合を表示する。使用したコードは以下である。

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
M = 1000
def mandel(c):
    k = 0
    z = 0
    while k < M and abs(z) < 1000:
        z = z**2+2*z.imag**2 + c#二重数の場合は z=z**2+z.imag**2 + c
        k += 1
    return k
vmandel = np.vectorize(mandel)
x, y = np.meshgrid(np.linspace(-0.5, 2.2, 640), np.linspace(-1.5,1.5, 480))
z = vmandel(x + y * 1j)#python では複素数の虚数単位が i ではなく j
plt.pcolormesh(x, y, z, cmap='RdGy', vmin=0, vmax=M)
plt.axis('scaled')
plt.show()
```

注 8 行目について

$$(a + bj)^2 = a^2 + b^2 + 2abj$$
$$(a + b\epsilon)^2 = a^2 + 0b^2 + 2ab\epsilon$$

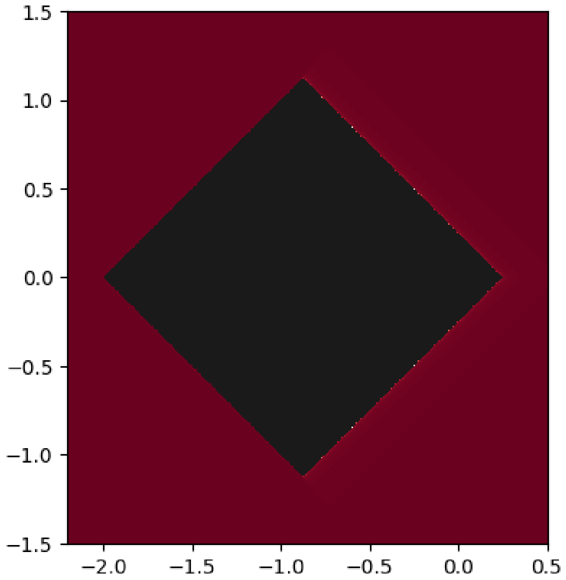
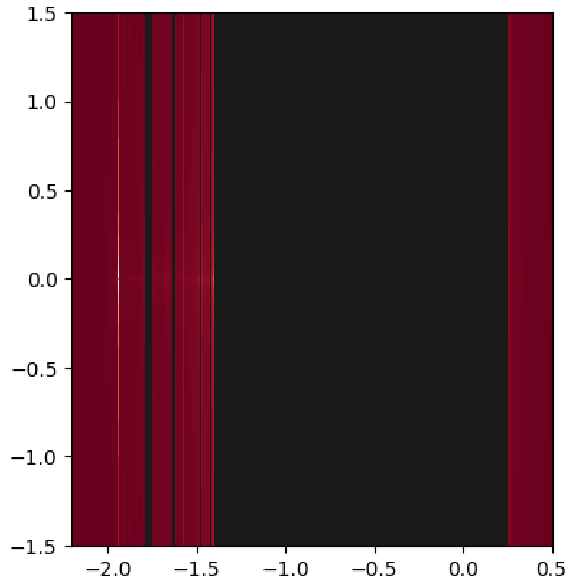
を

$$(a + bi)^2 + 2b^2 = a^2 + b^2 + 2abi$$
$$(a + bi)^2 + b^2 = a^2 + 0b^2 + 2abi$$

として表現することで、複素数しか使えない Python でも疑似的に分解型複素数・二重数を使えるようにしている。

3 実験結果

実験結果は図１,図２のようになった。

４．考察
３より、
1　分解型複素数でのマンデルブロ集合は対角線が実軸にある正方形になる。
2　二重数の場合、実軸を除く部分において*** 境界が全て虚軸に平行になる。
という予想が立った。次章ではそれらを証明する。

5.　証明

以下、断りがなければa, b, c, d, x, yは実数とする

５．１ 分解型複素数のマンデルブロ集合について

５．１．１ 標準形

以下、$e_1 = \frac{1+j}{2}, e_2 = \frac{1-j}{2}$ とする。

$$a + bj = \frac{a+b}{2}e_1 + \frac{a-b}{2}e_2$$

$ae_1 + be_2 = (a+b) + (a-b)j$が成り立つ。

この、$ae_1 + be_2$の形を標準形と呼ぶことにする。

５．１．２ 標準形の性質

$$e_1 \times e_2 = \frac{(1+j)(1-j)}{4} = \frac{(1^2 - 1^2)}{4} = 0$$

また、$e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2$より

$$(ae_1 + be_2)(ce_1 + de_2) = (ac)e_1^2 + (bd)e_2^2 + (ad+bc)e_1e_2$$
$$= ace_1 + bde_2$$

$xe_1 + ye_2 = (x, y)$と表記すると約束すると、

$(a.b) \times (c, d) = (ac, bd)$だとわかる。

また、明らかに$(a, b) + (c, d) = a + c, b + d$もわかる。

５．１．３ マンデルブロ集合が正方形となることの証明

$z_n = a_n e_1 + b_n e_2$とおくと

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{x+y}{2}, b_{n+1} = b_n^2 + \frac{x-y}{2}$$ となり、

z_nが発散しない$\Leftrightarrow$ a_nとb_nが発散しない

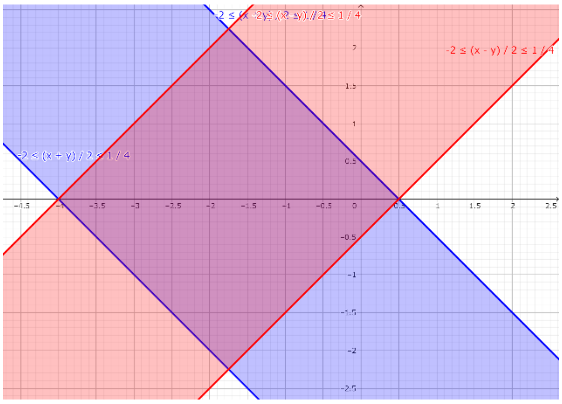
また、補題より、

rが実数の場合、$a_{n+1} = a_n^2 + r$が発散しない$\Leftrightarrow r \in \left[-2, \frac{1}{4}\right]$

従って、$\{z_n\}$が発散しないのは

$$\frac{x+y}{2} \in \left[-2, \frac{1}{4}\right], \frac{x-y}{2} \in \left[-2, \frac{1}{4}\right]$$ と同値。

これを座標平面にて表すと次のようになる。



図を見れば明らかなように、これは対角線が x 軸上にあるような正方形の範囲を表す。

5. 2　二重数におけるマンデルブロ集合について

5. 2. 1 *命題*　$z_{n+1} = z_n^2 + (a + b\epsilon)$ *で定まる数列*$\{z_n\}$*に対して、*$\{z_n\}$*が発散しないかつ*$b \neq 0$ *ならば、どんな*0 *でない実数*c*においても*$z'_{n+1} = {z'_n}^2 + (a + c\epsilon)$ *で定まる数列*$\{z'_n\}$*は発散しない。*

証明

$$z_n = x_n + y_n\epsilon\,, z'_n = x'_n + y'_n\epsilon \text{とおくと、}$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + (a + b\epsilon\,)$$

$$= (x_n + y_n\epsilon)^2 + a + b\epsilon$$

$$= x_n^2 + 2x_ny_n\epsilon + y_n^2\epsilon^2 + a + b\epsilon$$

$$= (x_n^2 + a) + (2x_ny_n + b)\,\epsilon$$

$$\text{従って、}x_{n+1} = x_n^2 + a, y_{n+1} = 2x_ny_n + b \cdots ①$$

と分かる。同様にして

$$x'_{n+1} = {x'_n}^2 + a$$

$$y'_{n+1} = 2x'_ny'_n + c\ \cdots ②$$

$$\text{よって全ての}n\text{において}x_n = x'_n$$

$$\text{また明らかに}x_0 = y_0 = x'_0 = y'_0 = 0$$

① *の両辺を*$\frac{c}{b}$倍 *して*

$$y_{n+1} \times \frac{c}{b} = 2x_ny_n \times \frac{c}{b} + c$$

を②から辺々引いて、

$$y'_{n+1} - y_{n+1} \times \frac{c}{b} = 2x_n\left(y'_n - y_n \times \frac{c}{b}\right)$$

$$y'_0 - y_0 \times \frac{c}{b} = 0\ \text{より、数学的帰納法より}$$

$$\text{全ての}n\text{において、}y'_n - y_n \times \frac{c}{b} = 0$$

$$\text{従って、}y'_n = y_n \times \frac{c}{b}$$

今、$\{z_n\}$*は発散しないため、*$\{y_n\}$*も発散しない。*

よって$\{x'_n\}$*も*$\{y'_n\}$*も発散しないことが言えたため、*$\{z'_n\}$*も発散しない。*

5. 2. 1 *系*

$b \in R - \{0\}$とすると、

あるb*において*$z_{n+1} = z_n^2 + (a + b\epsilon)$ *で定まる数列*z_n*が発散しない*

$\leftrightarrow$ *全ての*b*において*$z'_{n+1} = {z'_n}^2 + (a + b\epsilon)$ *で定まる数列*z'_n*は発散しない。*

が言える。

これは実軸以外の境界が全て虚軸に平行だということを示す。

6. 参考文献・URL

名古屋大学大学院多次元数理科学研究科　川平友則. マンデルブロ集合—2 次関数の複素力学系入門. 2012. 12. 22

“分解型複素数の基礎”. https://shabonlearning.com/Math/split_complex.html

早稲田大学高等学院　武沢護. 双曲数について.

“Mandelbrot 集合”.https://okumuralab.org/~okumura/python/mandelbrot.html

７．注釈

*分解型複素数については双曲数や双数など様々な呼び名があるが、本研究では分解型複素数と呼ぶことにする。

**複素数ではないので厳密にはガウス平面ではない。x 軸に実軸を、y 軸に虚軸をとったもの。

*** 一見不自然に思われる予想だが次のような例がある。c=-2 とすると数学的帰納法より簡単にすべての 2 以上の n に対して$z_n = 2^2 - 2 = 2$となることがわかるため、-2はマンデルブロ集合に含まれる。しかし、任意の 0 でない任意の実数 b において、$c = -2 + b\epsilon$は$z_n = x_n + y_n\epsilon$とすると$x_{n+1} = x_n^2 - 2, y_n = 2x_n y_n + b$とわかり、2 以上の n に対して、$x_n = 2, y_{n+1} = 4y_n + b$となり、この$y_n$は発散するため、$-2 + b\epsilon$はマンデルブロ集合に含まれない。そのためこのように予想した。

８．補足

二重数*の定義が*ϵ*を*$\epsilon^2 = 0$ *となる実数ではない数として*$a + b\epsilon$ *と表せる数*、という厳密性に欠ける定義だったが、*行列を用いれば厳密に定義できる。*

Iを二次単位行列、Oを二次零行列、

$E = (1\ 0\ 0\ 0)$

とする。

$aI + bE$*で表される* 2×2 *行列全体の集合を*D*とおく。*

今$E^2 = O$*より、*$(aI + bE) + (cI + dE) = (a + c)I + (b + d)E$

$(aI + bE) \times (dI + dE) = adI + (bc + ad)E$

となるため、

$f: D' \to D$*を*$aI + bE \to a + b\epsilon$で定義すれば$D'$*は二重数*$D$*と同型な環であるといえる。*

そのため、厳密な議論が必要な場合はこちらのD*を二重数として定義すれば良い。*

分解型複素数の場合は$J = (1\ 0\ 0\ -1)$*とすれば同様の結果を得る。*