輪郭と影の解析

～立方体を斜投影図法で描く～

Analysis of contours and shadows

~Drawing a cube by oblique projection method~

Abstract

In this study, we analyzed the contours and shadows of an object in three-dimensional space when it is illuminated by sunlight from a certain direction. The oblique projection method was used to project the object, and a cube was used as the object to be projected. These were formulated in "Decimal Basic" and a program was created.

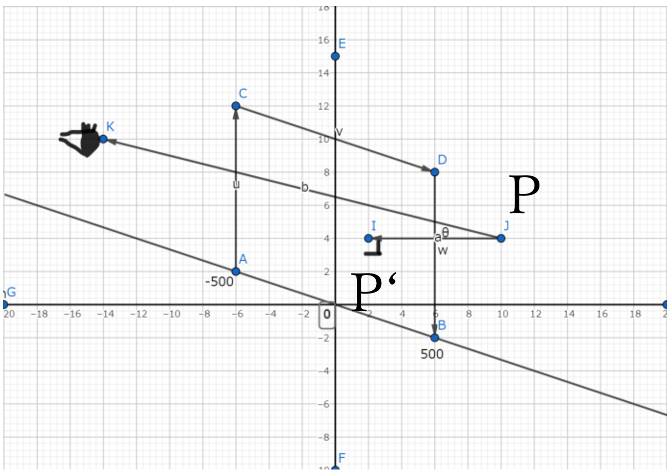
１．はじめに

本研究では、三次元空間において、ある方向から太陽光線が照射された時の物体の輪郭と影の解析を行った。物体の投影には斜投影図法と数学的遠近法を用い、投影する物体は立方体を用いた。斜投影図法とは、物体の形を平行光線を利用して、一つのスクリーンに斜めに表す図法である。数学的遠近法とは異なり、図形が歪まず、視覚的に物体を理解しやすいことが特徴である。対して、数学的遠近法は、ある決まった視点に光が収束するような光線を利用する図法である。斜投影図法とは異なり、人間の視覚をより再現することが可能であるとされている。これらを「十進ベーシック」上で数式化し、プログラムを作成した。最終的な目標は、人間の視覚の再現である、

２．研究方法

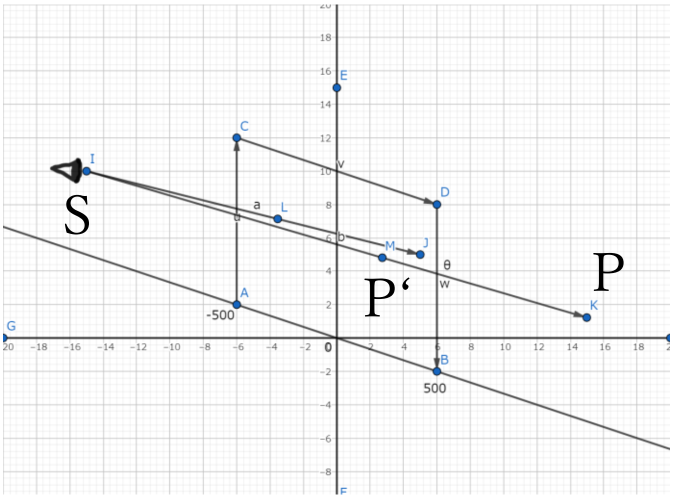
(1)　変換式について

変換式とは、ある式を他の式に変える、もしくは、ある一点の座標から別の一点を導き出すような式のことである。この研究においての変換式は、スクリーンの向こう側にある立方体、つまりは三次元の物体を、スクリーン上に二次元の平面図形として出力するために作る式であり、三次元上での点の座標Ｐ（x, y, z）を入力することで、二次元上での座標Ｐ‘(x′，y′)を出力するものである。



・斜投影図法の仕組み

斜投影図法において、スクリーンの向こう側の点Ｐからスクリーン上に点Ｐ’を出力するとき、点Ｐからスクリーンに対して垂直な直線を引き、その直線を点Ｐを中心にθ°起き上がらせたその直線上に視点を設定する。つまり、斜投影図法は点Ｐの座標に応じて視点が個別に設定される。このことは、出力される立方体の向かい合う辺どうしが平行であることの原因である。



・数学的遠近法の仕組み

　数学的遠近法において、スクリーン上の１点を決定するとき、視点をある点Ｓ（0,D,H)(D>0,H>0)に固定する。スクリーンの向こう側の点Ｐと視点Ｓの２点を通るグラフと、スクリーンの交点の座標が、スクリーン上の点Ｐ’である。

①　斜投影図法での変換式のプログラム

```
LET x0=P
LET y0=Q
LET z0=R
LET xA=x0
LET yA=y0+z0*TAN(θ*d)
```

　斜投影図法のプログラムにおいて入力する値は、視点からの角度θ、ある一点の座標（x,y,z）=(P,Q,R)の値である。これらの値を左図４，５行目の変換式にかけると、スクリーン上の座標が出力される。

②　数学的遠近法での変換式のプログラム

```
LET x0=P
LET y0=Q
LET z0=R
LET xA=x0*L/(z0+L)
LET yA=(y0*L+z0*H)/(z0+L)
```

　数学的遠近法のプログラムにおいて入力する値は、視点のｙ座標であるＨ、ｚ座標であるＬ、ある一点の座標（x,y,z）=(P,Q,R)の値である。同じように、これらの値を左図４，５行目の変換式にかけると、スクリーン上の座標が出力される。

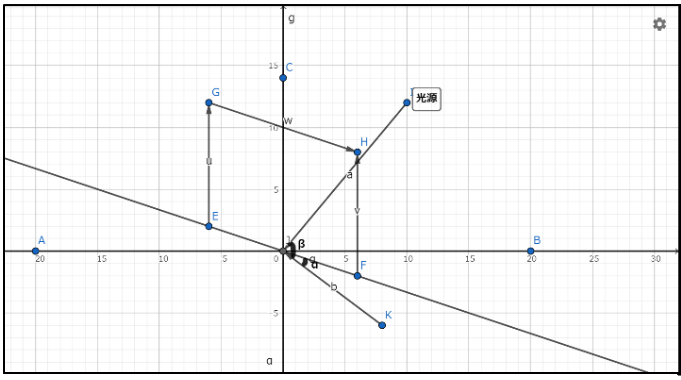
(2)　影の出力

①　影の出力方法

　影を出力するためには、新たに変換式が必要となる。スクリーンの向こう側の点Ｐが太陽光線を受け、Z-X 平面上点 P0 を出力すると考える。そして、点 P0 をそれぞれの投影法で変換式にかけることで、スクリーン上に点Ｐの影の点 P0’が出力されることとなる。

②　影の変換式

・影の模式図※



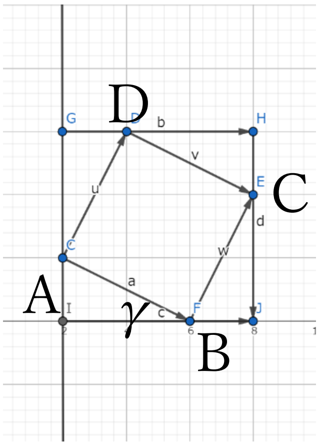
・影の変換式のプログラム

```
LET x0=P
LET y0=Q
LET z0=R
LET xA=x0
LET yA=y0+z0*TAN(θ*d)
LET xsa=x0-y0*COS(A*d)/TAN(B*d)
LET ysa=0
LET zsa=z0+y0*SIN(A*d)/TAN(B*d)
LET xda=xsa
LET yda=ysa+zsa*TAN(θ*d)
```

※求めたい点 P0 の座標は、点Ｐから、図のような角度α、βであらわされる太陽光線

と平行な直線を引き、地面と交わる点となる。計算を行い、作り出された変換式は以下のとおりである。

(3)　立方体のプログラム



今回、実験時に用いた立方体は、以下のような方法で出力されている。立方体 ABCD-EFGH を作成するものとする。

① 点 A(P,Q,R)を設定する。

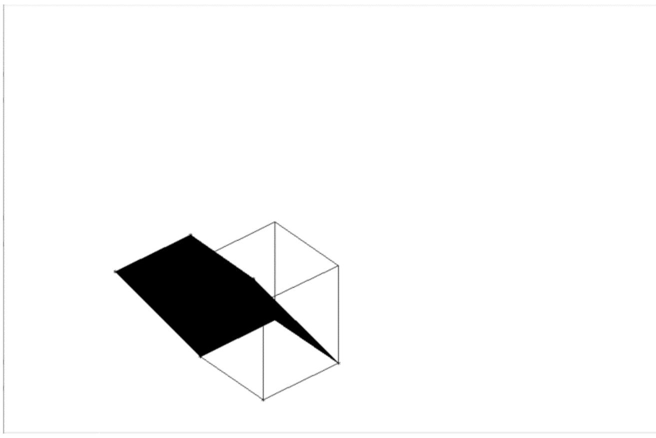
② 底面 EFGH は yz 平面に接しているため、高さは Q となる。

③ 点 A から点 B へは、x 軸方向に-cosγ*Q、z 軸方向に sinγ*Q 足すことで出力できる。
cosγ*Q=α、sinγ*Q=β とすると、
B(x,y,z)=(P−α,Q,R+β)と表せる。

④ 同様に、その他すべての点を表すと、
C(x,y,z)=(P−α+β,Q,R+α+β)、D(x,y,z)=(P+β,Q,R+α)
E(x,y,z)=(P,0,R)、F(x,y,z)=(P−α,0,R+β)
G(x,y,z)= (P−α+β,0,R+α+β)、H(x,y,z)= (P+β,0,R+α)

３．実験結果

(1)　斜投影図法と影

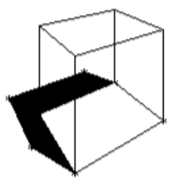


θ=30
A=60
B=30
P=-200
Q=150
R=200
γ=40

↑斜投影図法

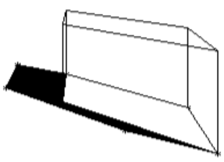
上図のように、斜投影図法では、試行したすべての立方体において、出力が成功した。どの立方体においても、視覚的にわかりやすい立方体となった。

(2)　数学的遠近法と影



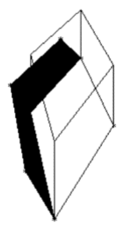
A=30
B=60
P=-200
Q=150
R=250
γ=40
L=200
H=300

↑数学的遠近法（成功例）



A=30
B=60
P=500
Q=150
R=250
γ=40
L=200
H=300

↑数学的遠近法（失敗例１）



A=30
B=60
P=500
Q=150
R=250
γ=40
L=200
H=800

↑数学的遠近法（失敗例２）

数学的遠近法では、成功例のように、人間の視覚をかなり再現した図形を出力することができた。しかし、失敗例１、２のように、図形が大きくゆがむ場合も現れた。

４. 考察

どちらの投影法も正しく出力することができた。しかし、どちらの投影法で描かれた立方体であっても、問題点が生じた。問題点の原因と考えられる点は、人間の目の仕組みを考えたときのそれぞれの投影法の根本的な仕組みである。斜投影図法では、視点が無限にあることが前提となっている。人間の目は２つなので、斜投影図法は前提から人間の視覚の仕組みと異なっていることがわかる。数学的遠近法での問題点は、視点とスクリーンの両方が固定されていることである。スクリーンの向こう側の物体が視点からＺ軸方向、Ｙ軸方向に大きく離れてしまっていた場合、スクリーンに映る図形が大きく縦や横に引き伸ばされてしまう。この問題を解決すれば、人間の視覚の再現に繋がるだろう。

５. 今後の課題

これまでの投影法では、人間が実際に視覚として感じ取っている形とは、大きくずれてしまっている。人間の脳では、三次元のものを三次元のまま認識している。その通りの変換式を作り出すことは不可能である。そのため、これからは人間の視覚に極限まで近づけた図形を出力するため、変換式を数学的遠近法を土台にして、改良をしていきたい。まず、人間の視覚の仕組みについて学びたい。

６. 参考文献・URL

GeoGebra　関数グラフ
https://www.geogebra.org/graphing?lang=ja
閲覧日　2023/11/11