

遠近法の解析

～数学的遠近法による多面体表示～

Analysis of Perspective

-Displaying of Polyhedra with Mathematical Perspective-

Abstract

Humans perceive three-dimensional space through perspective, which allows them to grasp the shape and size of objects with a certain degree of accuracy regardless of their location, but in photographs, objects on the edges are stretched out. The objective of this research is to program mathematical perspective and display it on the screen in the same way as the three-dimensional space recognized by humans. First, we programmed the screen display of a polyhedron using the equation of a straight line in space.

1. はじめに

ヒトは三次元上の空間を遠近感によって認識しているため、物体の場所に関係なく、その形や大きさのある程度、正確に把握することができる。しかし、スマートフォンで撮った写真などでは、端側にある物体は引き延ばされて写るため、大きさを把握することが難しい。

エッシャーのだまし絵は数学的遠近法を用いて、見るヒトの錯覚を利用して、部分的には違和感がなくとも、全体で見ると無理な空間的配置で描かれている。図Xは一見、高い位置から低い位置へ水が流れているように見えるが、よく見ると水が低い位置から高い位置に登っている。また、図Yは複数の空間が一つにつながった様子が描かれており、重力が異なる方向から働いている。図Zはまっすぐ続いた一本道の写真であるが、平行に引かれた白線が中央の一点に収束している。この図法は「一点透視図法」と呼ばれる。

そこで私たちは、ヒトが認識している三次元空間を、コンピュータ上に表現するにはどうすればよいかを考えた。本研究では、数学的遠近法と斜投影図法のプログラミングを十進 basic で行い、ヒトが認識している三次元空間 h_i と同じように、画面上に表示することを目的とする。遠近感のある写真や絵画などには、線が収束する消失点が存在する。

同大石研究室の 24 班の先行研究では、ベクトルを用いて数学的遠近法による立体の画面表示を行っている。私たちの班はその追研究として、解析幾何学で、あらゆる立体の画面表示を空間の直線の方程式を用いて、プログラミングを行った。

また、解析幾何学とベクトルの長所と短所、違いを明らかにすることも本研究の目的の一つである。



↑ 図 X エッシャーの絵



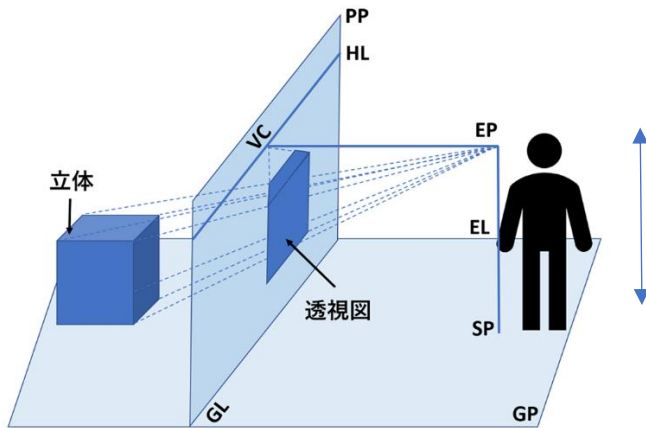
↑ 図 Y エッシャーの絵



↑ 図 Z 長い一本道

2. 研究方法

スクリーンからの距離をD、視点の高さをh、(h≥0とする。x-z平面を地面とするため) そのとき、スクリーンに映し出される立方体の像を、数学的遠近法と斜投影図法を用いてプログラミングする。数学的遠近法はヒトが見ている空間の像に近く、すべての辺が平行に見えるとは限らない。一方、斜投影図法は主にイラストなどに使われる、ヒトがわかりやすいように像を描くための図法で、本来平行な辺は必ず像でも平行になる。まず、スクリーンに表示される点Pの座標の式を求める。このとき、元の対象となる点P0(A, B, C)とする。



数学的遠近法：点 $P(A*D/(C+D), (B*D+C*h)/(C+D))$ 斜投影図法：点 $P(x_0, y_0+z_0*\tan \theta, 0)$

以下のプログラムは実際に十進 basic で作成したものである。

x_A, y_A はスクリーンに表示される点の座標であり、スクリーンは x-y 平面上にあるため、当然 $z=0$ であるからプログラムに含めていない。任意の立方体に適用できるようにするため、立方体の指定した一辺とスクリーン(x-y平面)とのなす角度を θ とした。

```
LET x0=P
LET y0=Q
LET z0=R
LET xA=x0
LET yA=y0+z0*TAN(theta*d)
```

↑資料1 斜投影図法のプログラムの一部

```
LET x0=P
LET y0=Q
LET z0=R
LET xA=x0*L/(z0+L)
LET yA=(y0*L+z0*H)/(z0+L)
```

↑資料2 数学的遠近法のプログラムの一部

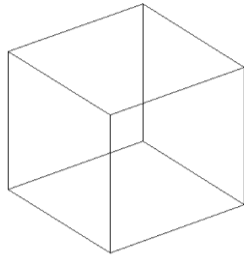
3. 結果

これらのプログラムをそれぞれ用いて、立方体を任意の A, B, C, D, h を入力して像を出力した結果、以下ようになった。

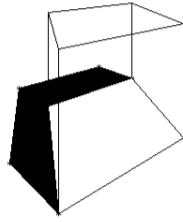
図1：成功例

図2：失敗例1 (原因：視点の高さ)

図3：失敗例2 (原因：視点から X 軸方向に物体が離れている)



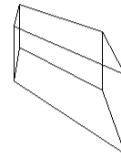
↑斜投影図法



↑図1



↑図2



↑図3

※現在同大石研究室の31班と共同で研究をしており、立方体の任意の太陽光線からの影や、物体の濃淡の作成もしている。そのため、図1の立方体は31班から参考資料として使用させていただいているため、影がついている。

斜投影図法では正確に立方体を表現することができた。

数学的遠近法で立方体を表現した場合、図の中心（消失点）への奥行きを理論的には正確に表現することができたが、ヒトの認識通りに正確に表現できたとはいえない。なぜなら、対象となる物体がスクリーンから遠くなればなるほど、視点が高くなればなるほど、物体のひずみが大きくなり、ヒトが通常、認識している立方体と異なるためである。また、数値によっては誤った像を表示してしまうことがある。ベクトルと解析幾何学との違いは、現段階では特に長所、並びに短所の違いは見られなかった。

4. 今後の展望

今後本研究で改善していきたいと考えているのは以下、四点である。

- 1, 物体が立方体の場合だけでなく、他の物体でも表示のプログラミングを考える。
- 2, 物体がスクリーンから十分遠い場合でも、ひずみができずに投影する方法を考える。
- 3, 物体スクリーンの端に表示される場合にも、物体が引き延ばされないようにする方法を考える。
- 4, 数学的遠近法を用いる際に、文字に範囲がないか、ないのであれば任意の数値を入力したときに誤った像を表示してしまう原因はなにか、を考える。

具体的に2, 3に関しては数学的遠近法の理論に基づいてできた像に対して新たなプログラムを作成してその像を後から人間が認識しているような像に修正する。また、ヒトが認識している空間に近づけるために、スクリーンは $x-y$ 平面上に面的な広がりをもって存在しているのに対し、ヒトの目は網膜で球体的な構造をしているという違いから、スクリーンを球体に変形させて物体を投影するプログラムにより、ヒトが認識している像を再現できると考えている。

エッシャーの絵のような幾何学的な美術作品をプログラミングにより今後、作成していきたいとも考えている。

5. 今後の研究予定

今後、物体に付随して生じる陰影、また他の物体でのプログラムも作成したいと考えている。

物体への陰影については任意の太陽光線を用意し、物体の面にある各点についての太陽光線と面に対する法線とのなす角度を求めることにより、コサインの値がその点の色の濃淡を表すことを利用する。また、影については物体の端点と太陽光線の始点を通る直線と地面との交点を求めることにより作成する。

6. 参考文献・URL

絵と数学 — 遠近法は世界をどう変えたのか —

<https://hamaguri.sakura.ne.jp/perspective1.html>

(1/17/2024)

投影図法・透視図法 http://i-zukan.net/ic/pe_projection.htm (1/17/2024)