曲面鏡式歪み絵の解析

円錐鏡・円柱鏡

Analysis of distorted pictures using curved mirrors

Cylindrical and conical

Abstract

A distorted picture is literally a distorted picture, and is a type of deceptive painting that can be made to look like an undistorted positive image by using a certain method. Curved-mirror distortion painting, which is the subject of this study, refers to distortion painting using curved mirrors. Previous studies have analyzed the mathematical formulation of curved mirror distortion pictures using vectors. In this study, we have developed a mathematical expression for curved mirror distortion pictures using only linear functions, without using vectors.

以下，本文

１．はじめに

歪み絵とは文字通り歪んだ絵のことであり、ある特定の方法を用いることで歪む前の正像に見せることができる騙し絵の一種である。西洋では17世紀頃から普及が始まり、18世紀に大流行した。本研究で扱う曲面鏡式歪み絵とは、曲面鏡を用いた歪み絵のことである。先行研究からベクトルを用いた曲面鏡式歪み絵の数式化の解析がなされている。本研究ではベクトルを用いず、一次関数のみでの曲面鏡式歪み絵の数式化を進めた。

2．研究方法

2-1．円錐鏡

円錐鏡を頂点から半分に割り、2次元平面上に表し、円錐鏡の真上に視点、頂点に原画像を設定した。（図１）視点から原画のある１点をみたとき、実際に私たちの眼にみえている点は円錐鏡上で反射して地面にうつった点である。反射して地面にうつる点は、入射角と反射角が等しいことを利用して求めることができる。図１の太線で示した部分が実際に眼にみえている画像である。ここで出た画像の座標を360°回転させることで、画像全体の歪み絵を作成することができる。以下、解析手順。

底面の半径が a, 高さ b の円錐鏡を底面の中心が原点０に一致するように xy 平面上に置く。高さｂから、正の方向に h 離れた座標に視点Ａを設定する。円錐鏡の頂点に原画像を置き、原画像のある１点を点 P(r, b)とする。直線 AP が円錐鏡上で反射し、ｘ軸と交わる点を点 P’（r’, 0)とする。（図２）ただし、ｒ=0のとき点 P’は存在しない。

(1)直線 AP と円錐鏡との交点 Q の座標を求める。（ｘ＞０のときの円錐鏡の傾きを直線 m と置く）

直線 AP=$-\frac{h}{r}x+b+h$…①

m=$-\frac{b}{a}+b$…②

①，②の交点が点 Q より Q $\left(\frac{ahr}{ah-rb}, -\frac{brh-(ah-br)b}{ah-br}\right)\cdots$③

(2) 点 Q を通り円錐鏡面に垂直である直線 l の式を求める。

円錐鏡の傾きは$-\frac{b}{a}$より、直線 l の傾きは$\frac{a}{b}$となる。傾きと通る点を用いて、

直線 l=$\frac{a}{b}x+b-\frac{rh(a^2+b^2)}{(ah-br)b}\cdots$④

(3) 直線mと傾きが同じで視点Aを通る直線 n を求め、直線 l との交点 U を求める。

直線 n =$-\frac{b}{a}x+b+h\cdots$⑤

④，⑤の交点が点 U より、U$\left(\frac{ah\{r(a^2+b^2)+b(ah-br)\}}{(ah-br)(a^2+b\text{^}2)}, \frac{(b+h)\{(ah-br)(a^2+b^2)\}-bh\{r(a^2+b^2)+b(ah-br)\}}{(ah-br)(a^2+b^2)}\right)$

(4) 直線 l に対して視点 A と対称な位置にある点 B の座標を求める

B $\left(\frac{2ah\{2(a^2+b^2)+b(ah-br)\}}{(ah-br)(a^2+b^2)}, b+h+\frac{2bh\{r(a^2+b^2)+b(ah-br\}}{(ah-br)(a^2+b^2)}\right)$

(5) 直線 QB と x 軸の交点 P’を求める。

QB の傾き　$\frac{(a^2+b^2)(h+3bhr)+(2b^2+h)(ah-br)}{(a^2+b^2)ahr+(ah-br)2abh}$

QB の傾きと x 座標の接点 $\frac{ahr(a^2+b^2)(abh+b^2rh)+(ah-br)(2a^2b^2h^2+2ab^3rh+arh^2)}{(ah-br)\{a^2+b^2)(h+3bhr)+(2b^2+h)(ah-br)\}}$

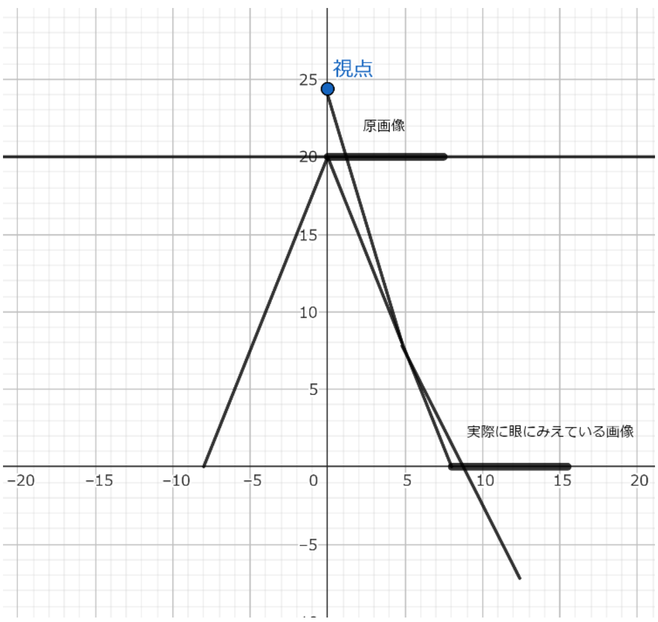

図1

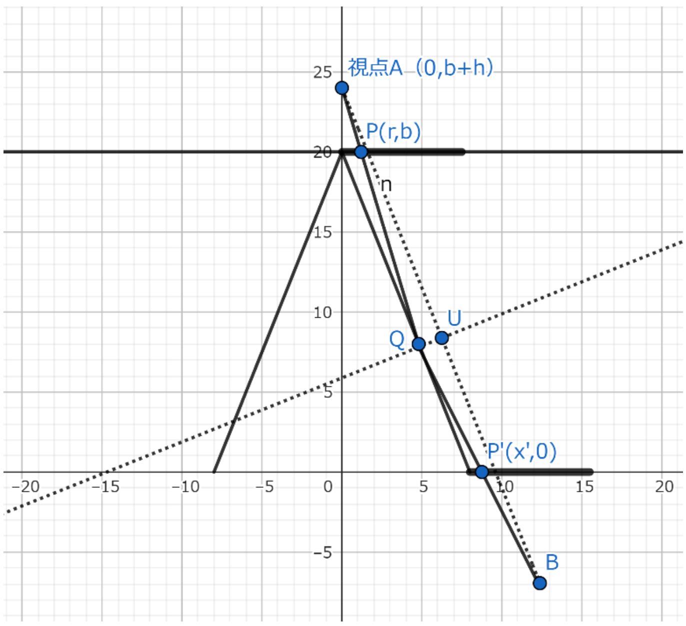

図2

2-2. 円柱鏡

視点をＥ(0,ey,ez)、鏡面上の反射する点をＰ(rcosθ,rainθ,Pz)、点Ｅから円柱鏡に接線を引いた時の接点をP1,P2 、P1-P2上とEPの延長線の交点をＤ(do,r^2/ey,dz)、EPとz=0の交点をＩ(s,t,0) 反射してできる実像をＲ(X,y,0) と設定する。(図３)

また、実像が反射して実際に虚像が映るのは鏡面上だが、目にはP1-P2上の面に写って見えていると考えられ、点Ｅから見た時に点ＲはP1-P2上の点Ｄに映るとする。

(1)点Ｉの座標を求める。

点Ｉ点Ｄ点Ｅのxyz座標から三点間の距離を求め、相似を用いて、それぞれの長さの比より、

$s = dx \times ez/-dz + ez$

$t = dz \times ey^2 - r^2 \times ez/ey \times (dz - ez)$…①

(2)点Ｄと点Ｒの関係式を求める。

ここでは、すべての点をxy平面に垂直に下したものとして考える。　(図４)

点p'における接線の方程式は $x\,cos\theta + y\,sin\theta = r$

これを変形して、 $y = -x/\,tan\theta + r/\,sin\theta$ …②

点Ｉと点Ｒの中点が接線②上にあるので、中点を点Ｍとすると、M(x+s/2、y+t/2)とおける。

点Ｍは接線②上にあるので、$(x+s)cos\theta/2 + (y+t)sin\theta/2 = r$…③

また、直線IRと接線③と垂直に交わっているので直線IRの傾きがtanθ。

また、IRの傾きがy-t/x-sなので、 $y - t/x - s = \ tan\theta$ …④

③④を連立して、それに①を代入

$$x = \frac{\{2(dxeyr\cos\theta - dzey^2\cos\theta\sin\theta + 2eyr^2\sin\theta - ezey\cos\theta) + (1-2\sin^2\quad\theta)dzeydx\}}{\{ey(dz-ey)\}}$$

$$y = \frac{\{2ey\sin\theta\,(dzr - ezr + ezdx\cos\theta) + (1-2\sin^2\quad\theta)dzey^2 + (1-2\cos^2\quad\theta)ezr^2\}}{\{ey(dz-ez)\}}$$

最後に、点 P'(rcosθ、rsinθ)を代入してｉ) dx＞0のとき、ⅱ) dx＜0のとき、ⅲ) dx=0のときで場合分けを行って、sinθ、cosθ の値を求める。これにより、点Ｒのｘ座標ｙ座標をｒ、ey、ez、dx、dzの値を設定することで求めることができる。

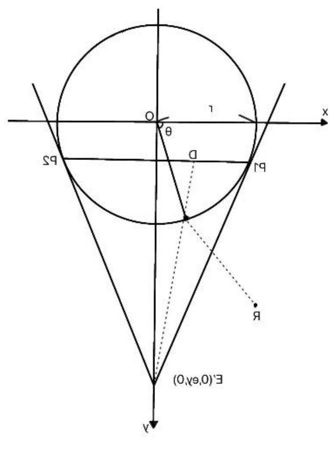

図3

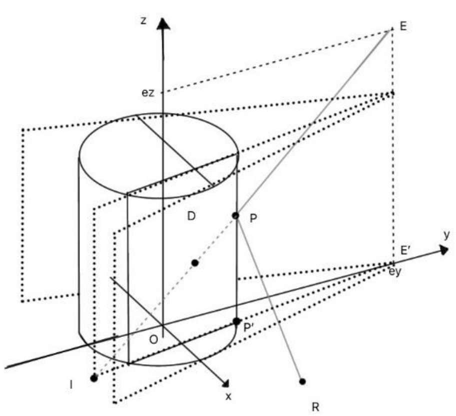

図4

３. 検証結果

３-１. 円錐鏡

P’ $\left(\frac{ahr(a^2+b^2)(abh+b^2rh)+(ah-br)(2a^2b^2h^2+2ab^3rh+arh^2)}{(ah-br)\{a^2+b^2)(h+3bhr)+(2b^2+h)(ah-br)\}}\right.$, O ）

3-2. 円柱鏡

$$x=\frac{\{2(dxeyr\cos\theta-dzey^2\cos\theta\sin\theta+2eyr^2\sin\theta-ezey\cos\theta)+(1-2\sin^2\theta)dzeydx\}}{\{ey(dz-ey)\}}$$

$$y=\frac{\{2ey\sin\theta\,(dzr-ezr+ezdx\cos\theta)+(1-2\sin^2\theta)dzey^2+(1-2\cos^2\theta)ezr^2\}}{\{ey(dz-ez)\}}$$

４．今後の課題

円錐鏡、円柱鏡ともに数式が正しいことを証明する。

５．参考文献

http://batmitzvah.blog136.fc2.com/blog-entry-3248.html

http://seika.ssh.kobe-hs.org/media/common/KadaiKenkyuu/suugakuEtc/2014/2014%E8%AA%B2%E9%A1%8C%E7%A0%94%E7%A9%B6-%E5%86%86%E6%9F%B1%E3%82%A2%E3%83%8A%E3%83%A2%E3%83%AB%E3%83%95%E3%82%A9%E3%83%BC%E3%82%BA(%E8%AB%96%E6%96%87).pdf