

遠近感への数学的なアプローチ

A mathematical approach to perspective

Using vectors, the students will transfer familiar three-dimensional figures such as cubes and cylinders onto the screen while considering perspective, shading, and other factors. The students will also create a trompe l'oeil picture called "Ames' House" using these figures, and draw a development of the picture.

1. はじめに

絵画史上において人間が“物体表面色の陰影”の明暗を数学的に処理・表現し始めたのは20世紀半ばのことであり、謂わば「つい最近の出来事」である。それをプログラムで処理・再現するのが本研究の概要である。我々は、絵画の中でもだまし絵で有名な“エイムズの家”（図1）の仕組みが気になり、なぜこのように大きい人と小さい人が同じ空間にいるように見えるのだろうかと考え、展開図を考えてその仕組みを明らかにしようとした。そして、このエイムズの家についての学習を深めていく中で、プログラミングとベクトルの考え方をを用いることで作成することが可能であると分かり、これらについて学習していこうと考えた。また、これらを実際に人間が見えているような形、色等で表すことが可能になれば、この分野の研究は上記のようにあまり進んでいないため、数学的進歩をもたらすのではないかと考え、この内容を研究することとした。

図1 エイムズの家



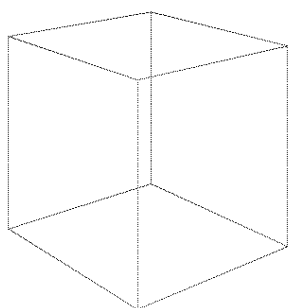
2. 研究方法

我々は、プログラミング言語「十進 BASIC」を用いて 3 次元にある物体をパソコンのスクリーン上に落とし込む。「十進 BASIC」を用いてスクリーン上に落とし込むには数Ⅱ・B のベクトルや媒介変数表示の範囲が必要であり、我々は全員が高校 1 年生でベクトルを習っていないため、2 学期の序盤まではベクトルの学習を主な活動とし大石先生作のベクトルのプリントを大石先生の指導を受けながらアクティブラーニングを行いながらひたすら取り組む。そして、身近にある 3 次元の物体を「十進 BASIC」でスクリーン上に落とし込む。まずはじめに立方体の出力を行う。立方体の出力方法としては、3 次元で表される立方体を媒介変数表示を用いて二次元に落とし込む。その際、遠近感覚を考慮し、遠近法を用いて立方体を出力する。具体的には出力する立方体を観測する視点を X 座標、Y 座標、Z 座標を用いて定点化し、立方体のそれぞれの点を視点と同じく 3 次元の座標におき、その視点から見た 2 次元上に映るそれぞれの点の位置を出せるような公式を計算して出し、それを用いて 2 次元であるパソコンの画面に 3 次元であるように見せることにした。次に、太陽光線の入射角によって異なる物体表面の陰の濃淡を濃淡値と定義し、その濃淡値が大きくなると物体表面が暗くなっていく。それによって物体表面の陰の濃淡を表現する。それぞれの面によって入射角は異なり、それによって濃淡が異なるのである。その変化具合を公式化することで、プログラミングによって、立方体の細かい部分までの出力が可能になるのである。上の図のように立方体に光が当たったとき、立方体の光が当たっている面以外の三面に濃淡がつけられ陰を表す。そして最後に、「陰影」の“影”即ち物体を通して地面に描かれる「かげ」の部分を出力する。そうすることで、最終的にある視点からの光の当たった立方体を出力することができる。それを利用して「エイムズの家」をスクリーン上に落とし込み表した上、展開図を考える。

3. 実験結果

先ほど述べたように、半年間全力で取り組み、学習してきた媒介変数表示や、ベクトルなどの知識を利用して、「十進 BASIC」を用いて3次元上にある点を2次元のスクリーンに落としこみ、点を集めることで2次元上で3次元で見えるような遠近感のある立方体の出力に成功した。それが以下の図2である。ここで、3次元にあるものを遠近感を数学的に処理して2次元に落とし込むことに成功した。しかし、遠近感を数学的に処理しただけではまだ3次元のように見えないので、次に陰影を数学的に処理することを考える。

図2 「十進ベーシック」で作成した立方体

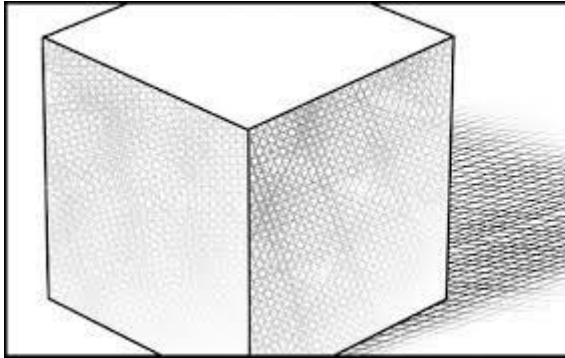


また、立方体の応用として、円を立体的にコンピューターの画面上に表すことにも成功した。こちらも、プログラミングにおける円を描く公式をスクリーン上に写し込み、高さなども表現することが可能である。

4. 考察

2次元を3次元に落とし込むことができた。立方体を構成する直線は、多くの点の集合体であり、この直線の描き方は、プログラミングにおける基本である。この点の密度を現実世界の太陽光の当たり方、物質の位置などをリンクさせて数式化し、プログラミングに代入することで、直線における点の密度を変化させることで、物質に映る陰を表し、太陽光の光源を定点化し、立方体上の点を通る直線を作ることで、地面に映る影を表現できるのではないかと思う。

図3 陰影をつけた立方体の図



そして、その影の濃淡は、どのようにして変わるのか、についてだが、それは単位面積当たりの受光量の違いによって決まるものである、と考えた。場所によって光源からの角度が異なり、それによって変わるのである。これを利用して濃淡値についての数式を作りだせるのではないかと考えている。

5. 今後の課題

先の考察で述べたように、本研究で本来遠近感のある三次元の立方体がプログラミング言語「十進 BASIC」を用いて二次元に落とし込むことができたが、私たちの研究の本来の目的は立方体を作ることではない。私たちは“エイムズの家”をプログラミング言語「十進 BASIC」を用いて数学的に表現することや、同様にプログラミング言語「十進 BASIC」を用いて本研究で取り組んだ立方体を図のように数学的に表すのではなく、リアルに遠近感があり、ある点から光が当たっているように陰影をつけて表すことが目標である。これからの研究の方針としては、まず陰を出力することだ。ここでポイントとなるのが濃淡値だが、この数値は太陽光線の入射角つまりは角度の情報であるから三角比への理解を一層深めていきたいと考えている。さらにもうひとつの影も同様に濃淡値を用いて、太陽を通過して各頂点に接する直線の地面との交点で囲われるところが影となり求めることが出来ると考えられるので研究を進めていきたい。このように研究を進めていくためには、濃淡値の数式による定義が必要なのでその研究も同時に進めていきたい。

6. 参考文献・URL

「遠近感の使い方」 大石明德 2022