

数学を用いた文様の作成

～絨毯文様出力プログラム～

Creating patterns using mathematics

～Carpet pattern output program～

Abstract

We have studied to create a program to output a complex pattern(carpet pattern) from a simple pattern (unit pattern).We also studied the possibility of creating a program that outputs a variety of patterns just by changing the unit pattern.Finally,we developed a program that can generate various carpet patterns by simply changing the unit pattern. The goal was to create a program that could produce a variety of carpet patterns just by changing the unit pattern. The program includes a variety of first-order transformations. At this stage, we have not yet completed a program that can generate various carpet patterns. However we have succeeded in creating a transformation formula for each carpet.

1. はじめに

本校では、理数探求の授業内で、十進ベーシックアプリのプログラミング言語を学習しており、アプリを利用することで、画面上の座標に様々な文様を出力することができる。また、ある特定の文様を画面上に出力し、関数を用いてそれらを回転や平行移動させることができる。ここで、変換をかける前の基本となる文様を単位文様と呼ぶこととする。単位文様に数学的な式を用いて様々な変換をかけ、ペルシャ絨毯のような文様を出力することができるプログラムを作成することを、本研究の目的とする。

2. 仮説

ペルシャ絨毯には、様々な一次変換や平行移動が使われている。それらを数学的な式に起こし、プログラムを作成することで、単位文様を変えるだけで様々な種類の絨毯文様を出力できると仮説を立てた。

3. 研究方法

プログラミングソフト「十進ベーシック」を使用し、単位文様に変換をかけてある文様を出力するプログラムを作成する。作成したプログラムの単位文様を変えていったとき、様々な種類の絨毯文様が出力されるかを検証する。本研究の最終目標である絨毯出力プログラムの作成に当たる前に、様々な変換を探るためにサンプルを作成した。成果物として、このサンプルも示す。

- (1) 中間発表に向けて、ある単位文様に変換をかける簡易的なプログラムを作成した。このプログラムの作成にあたり、絨毯文様に使用されている変換の式を導いた。その式をプログラムに

組み込み、画面上の座標平面で単位文様に作用するかを検証した。

- (2) 中間発表の後、それまでに求めた変換の式を組み合わせ、自作の文様を作成した。これは、複雑な絨毯文様の作成に取り掛かる前に、式を使いこなせるようになること、また、式を組み合わせで発展させることを目的として行った。
- (3) 自作の文様の作成に成功したため、実際に存在するペルシャ絨毯の文様を参考に、式を立ててプログラムを作成した。ここでは単位文様を変えたときに、様々な種類の絨毯文様が出力される、という仮説の立証を目的としたため、変換式のみを組み込んだプログラムを先に作成し、そこに単位文様を入れるという手順で検証を行った。

4. 結果

- (1) 中間発表に向けて作成した文様には、回転、平行移動、対称移動を組み込んだ。平行移動の式は $x' = x + p$ で、 p だけ x 軸の性の方向に移動する。 y 座標についても同様である。 x 座標を $x = q$ を軸に対称移動させる式は $x' = 2q - x$ である。また、回転移動の式は、 $x' = x * \cos(\theta * d) - y * \sin(\theta * d)$ 、 $y' = x * \sin(\theta * d) + y * \cos(\theta * d)$ となり、 θ の部分に入れた数値分回転させることができる (図1)。このとき変換は行列を使って式に表し、媒介変数表示の形をとる。



図1 回転・平行移動・対称移動

また、このプログラムでは、画面上に出力した単位文様を、数式を使って範囲を指定することで切り取り、切り取った部分のみに変換をかける、という方法をとっている。これは、研究の最後まで変えることはない。しかし、切り取り方に長方形もしくは円・楕円形という選択肢しかないため、単位文様の形によっては一部はみ出したり余ったりしてしまう。そのため、隙間なく並べることが難しい場合もあるという問題点が浮かび上がった。最終的にはどんな単位文様にも対応したプログラムを作ることを理想としているため、これも解決すべき問題であると考えた。

- (2) 導かれた様々な変換式を組み合わせ、草木の文様を出力するプログラムを作成することに成功した (図2)。ここでは式をさらに発展などさせ、より複雑な変換式を発見した。また、複雑な変換になっても、式は簡単なものになることもあった。

中間発表の時点では $x = q$ について対称であったが、ここでは $y = x$ という一次関数のグラフについて対称移動を行った。その時の式は $x' = y$ 、 $y' = x$ と、かなりシンプルなものとなった。これも行列を使用した媒介変数表示である。また、対称移動の式を回転の式の中に組み込むことで、対称移動したものを回転させることができた。



図2 草木の文様

- (3) 実際の絨毯の文様を参考にプログラムを作成することに成功した。また、そのプログラムで単位文様ではなく極限まで簡略化した図形に変換をかけ、プログラムが正しく作用し、絨毯文様に近い文様の配置が出力されることが確認された。しかし、単位文様をプログラムに取り込もうとしたところ、エラーが発生してしまい、文様の完成を最終発表に間に合わせることができなかった。

その後エラーは解消し、すぐに絨毯文様の出力に向けて取り組んだが、完成には至ることができなかった。基礎は完成しつつあり、完成させたい文様全体やプログラムの見通しが立ってきた段階である(図3)。

```
!*****
CLEAR
DIM c$(0 TO 5)
DIM cc(0 TO 5)
!*****
!load"f:無題42_20221215074537.png"
!*****
SET BITMAP SIZE 1016,662
SET WINDOW -500,500,-326,326
LET d=3.14159/180
SET AREA COLOR 19
flood -500,326

FOR θ=0 TO 360 STEP 0.5
  FOR 半径=0 TO 90 STEP 0.5
    LET x=0.5*半径*COS(θ*d)-325
    LET y=半径*SIN(θ*d)+200
    !-----
    SET COLOR MODE "NATIVE"
    !-----
    ASK PIXEL VALUE(x,y) c
    LET c1=c+16*6
    LET c1$=BSTR$(c1,16)
    LET b5$=mid$(c1$,2,1)
    LET b4$=mid$(c1$,3,1)
    LET g3$=mid$(c1$,4,1)
    LET g2$=mid$(c1$,5,1)
    LET r1$=mid$(c1$,6,1)
    LET r0$=mid$(c1$,7,1)
    LET c$(5)=b5$
    LET c$(4)=b4$
    LET c$(3)=g3$
    LET c$(2)=g2$
    LET c$(1)=r1$
    LET c$(0)=r0$
    FOR m=5 TO 0 STEP -1
      IF c$(m)="A" THEN LET c$(m)="10"
      IF c$(m)="B" THEN LET c$(m)="11"
      IF c$(m)="C" THEN LET c$(m)="12"
      IF c$(m)="D" THEN LET c$(m)="13"
      IF c$(m)="E" THEN LET c$(m)="14"
      IF c$(m)="F" THEN LET c$(m)="15"
    NEXT m
  FOR n=5 TO 0 STEP -1
```

図3 プログラムの一部

5. 考察

図1や図2で使われている回転移動や対称移動は、行列を使って表せることが分かった。このことから、行列を使うことで、様々な一次変換を表現することができると考えられる。ただし、平行移動は一次変換ではないため、これには該当しない。

回転移動の式 $x' = x * \cos(\theta * d) - y * \sin(\theta * d)$ 、 $y' = x * \sin(\theta * d) + y * \cos(\theta * d)$ は、行列を用いることで

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表現することができ、また、 $y = x$ についての対称移動の式 $x' = y$ 、 $y' = x$ は、前述した式と同様に行列を用いることで

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表現することができる。これらのことから、一次変換の式であれば、複雑なものであっても、行列

を用いることで、すべて同じ形で表現することが可能であると考えられる。

図3のプログラムでは、実際の絨毯から単位文様のみを切り取り、プログラムを使用する予定であった。十進ベーシック上で描いた、極限まで簡略化した文様は、式の通りに変換がかけられ、参考にした絨毯と似た配置の文様を作り出すことができた。しかし、まだ様々な種類の単位文様で検証には至っていないため、現段階では、仮説が正しいと言い切ることはできない。

6. 今後の課題

2023年2月現在、本研究の目標であった絨毯文様の基礎が完成しつつあるので、完成までは研究を続ける予定である。また、完成した絨毯文様を一つ出力した後、単位文様を変化させ、様々な文様を出力させることに成功すれば、仮説の立証につながるのではないかと考えている。

また、中間発表で、単位文様に変換をかける際、動かすことのできる形に限界がある、という問題点もまだ解決に至っていない。研究の当初の目的とは外れるが、より精度の高いプログラムを作成するためには、この部分の改善も必要になってくると考えている。こちらの問題については、中間発表の際に先輩方から、二次関数などの今より複雑な形を組み合わせで切り取るなどのアドバイスをいただいたため、それらを参考にしていきたい。

7. 謝辞

本研究を進めるにあたってご助言頂きました堀一繁先生、井上豪先生に厚く御礼申し上げ、感謝の意を表します。本当にありがとうございました。

8. 参考文献

「十進ベーシックテキスト」/大阪教育大学附属高等学校天王寺校舎 情報科