

数学とコンピュータを用いた曲面の展開 ～立体模型を製作する～

Expansion of curved surface with computers and mathematics ～creating a three-dimensional object～

Abstract

We have been working on the development of curved surfaces. This time, we created a development of a solid with two cones attached. We were able to do this by considering a cross-sectional view parallel to the base of the target solid and a cross-sectional view perpendicular to the base of the solid.

1. 目的・製作目標

昨年度は回転曲面である壺の展開図を二通りの方法で作成し（図1）、そこに模様を載せることに成功した（図2）。そのため、今年度は去年度の研究を発展させることを軸に置き、回転曲面ではない曲面について展開図を作る方法を確立させることを目的とした。本研究は模様の載った、山が連なっているような立体の展開図の製作を目標とした。

2. 研究手順

まず初めに、展開図を作成する立体を決めた。本研究は複雑な立体模型を作ることを視野に入れて、そのときに必要になる立体をくっつける方法を探るために円錐を2つ連結させた立体（図3）（以下円錐山脈と呼ぶ）の展開図を作成することにした。次に、図形描写のためのプログラミングソフト「10進BASIC」を用いて円錐山脈の展開図を作成するためのプログラム及び、その展開図に模様を載せるプログラムを作成した。そのプログラムはどんな形の円錐をどのようにくっつけたときにも作成できるように一般化されたもので、他の立体にも応用を利かせられる。そして、そのプログラムの出力結果を印刷し、立体模型を組み立てた。

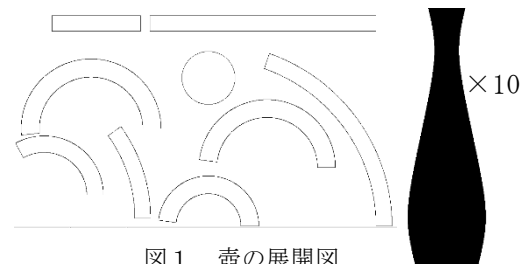


図1 壺の展開図



図2 模様の載った壺

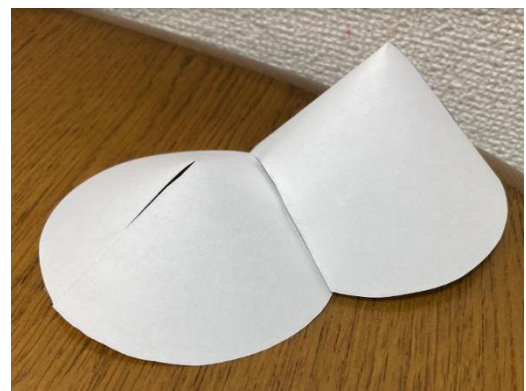


図3 円錐山脈

3. 展開図を作成するプログラムの原理

まず円錐山脈の展開図を出力する。円錐山脈の展開図は、円錐の展開図から2つの円錐が重なっている部分を切り取ったものになる。それを作るときに円錐山脈の正面から見た投影図とある高さでの断面図を考える(図4)。まず立体のある高さでの断面図(図4下)における2円の共有点に印をつける。次に右側の円の中心から鉛直右向きに伸ばした直線を 0° とし反時計回りを正の方向としたときに、右側の円周上の点を 0° から 360° まで読み取り、それを展開図(図5)の 0° から扇形の中心角の大きさ $[\]$ まで等間隔にプロットしていく。ただし、円錐の底面の半径と展開図の扇形の半径(円錐の母線)は異なるので、正面から見た投影図(図4上)において $DN:DN' = DE:DE'$ であることを利用して、断面図をとった高さ NN' からプロットする円周の半径 DE' を求めている。これによってある高さにおける2つの円錐の共有点(図4の★)を展開図(図5)に写し取ることができる。この操作を2つの円錐が共有点を持つすべての高さで行うことで、展開図に2つの扇形の共有点がつくる曲線を描くことができ、展開図が完成する(図6)。最後に展開図を組み立てる際に、展開図(図6)にある曲線を切り落とすと、2つの円錐をぴったり連結させることができる。

次に、円錐山脈を構成する円錐の形を決定づける、底面の円の半径、高さ、底面の円の中心間距離を座標空間上で定める。そして、その値をプログラム上の変数の値に設定する。今回は底面の半径が160で高さが120の円錐と、底面の半径が160で高さが200の円錐の底面の中心間距離が200とした(図7)。

このとき片方の円錐の展開図から2つの円錐の共通部分(図6の扇形の内部の曲線)を切り取ることで円錐山脈(図3)を組み立てることができる。

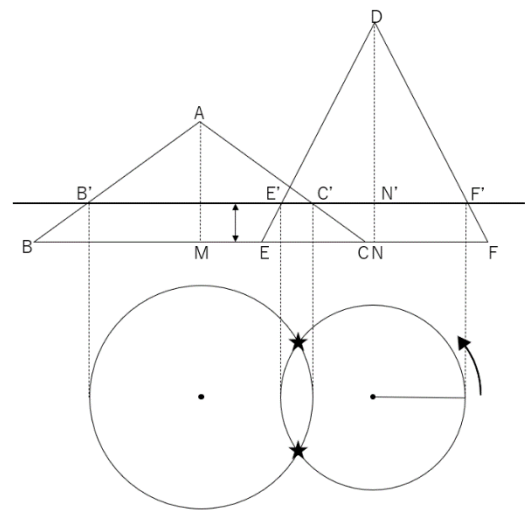


図4 円錐山脈の投影図と断面図

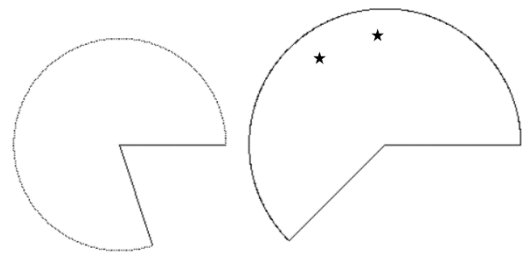


図5 円錐の展開図とプロットした点

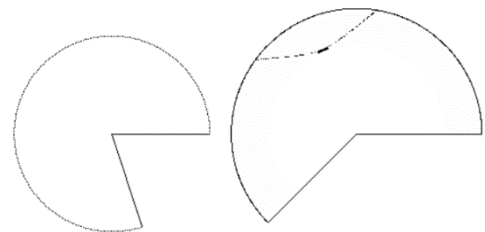


図6 円錐山脈の展開図

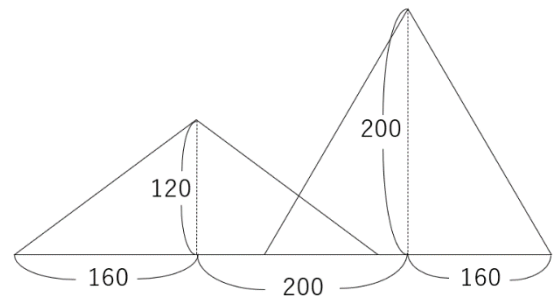
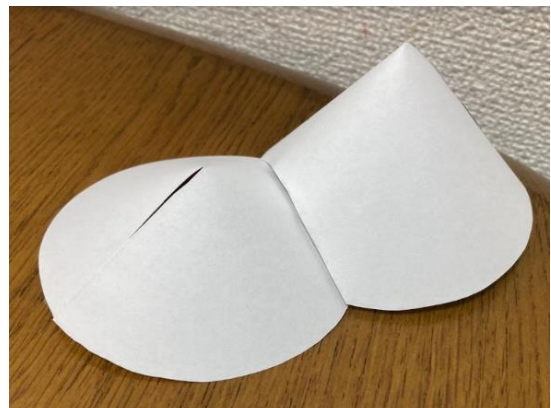


図7 円錐山脈の形



再掲図3 円錐山脈

次に、円錐山脈にプロジェクションマッピングのように真正面から見たときに綺麗に見えるように模様を載せる。それを作るときにも同様に円錐山脈の正面から見た投影図とある高さでの断面図を考える（図8）。まず別の場所に出力した模様を正面から見たときの投影図（図8上）と同じ形になるように切り取る。そして、まずある高さでの模様を円錐の左端から断面図（図8下）の二重線までの長さ分（点Mより上では円錐の右端までの長さ分）読み取る（図8上の矢印）。次にその読み取った模様を、その高さでの断面図の円周上に写す（図8下の矢印）。このときに、中心から鉛直左向きに伸ばした直線を 0° とし反時計回りを正の方向とし、 ACOS 関数を用いて、左からある x だけ離れた点をPとしたときに OP/OQ の値から角 α を求めることで、点Qを $(OQ\cos\alpha, OQ\sin\alpha)$ のような形で（実際のプログラムでは中心の位置や角度の取り方が少し異なる）表すことができる。そして、円周上に写した点を同様に 0° から 360° まで読み取り（図9）、それを展開図の 0° から扇形の中心角の大きさ $[\circ]$ まで等間隔にプロットする（図10）。この操作を円錐の全ての高さで行うことで、展開図の組み立てたときに正面から見える部分のみに模様を載せることができる。これと同様の操作を右側の円錐についても行い、右側の円錐の展開図にも模様を載せる。

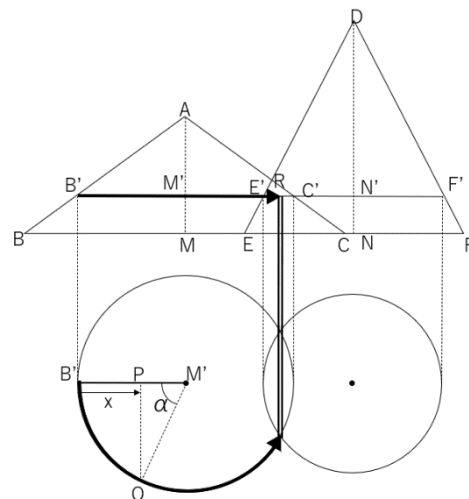


図8 円錐山脈の投影図と断面図

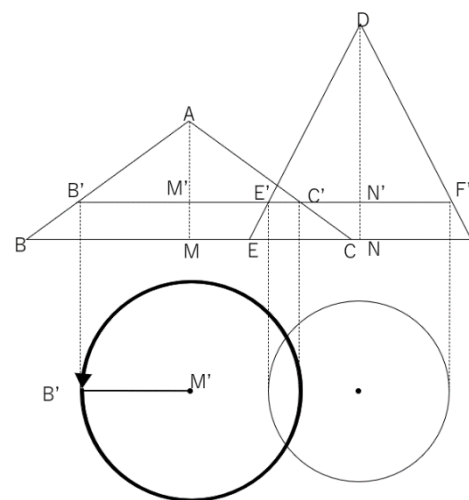


図9 断面図の模様を読み取る

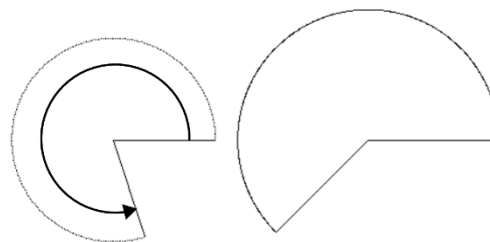


図10 展開図に模様をプロットする

次に、円錐山脈に載せる模様を決定する。今回は片方の面に花と葉っぱの模様（図11）を、もう片方の面には木と葉っぱの模様（図12）を載せた。これらの模様はどちらも30班の研究（数学を用いた文様の作成～絨毯文様出力プログラム～）で作成したものを借用した。これらの模様を切り取る位置は本研究で作成したプログラムによって定められているので、その枠に模様が収まり、かつ組み立てたときに綺麗に見えるように模様の高さと位置を調整する。

以上の操作をプログラムに書き起こすことで、円錐山脈の展開図を出力し、そこに正面から見たときに綺麗に見える模様を出力するプログラムが完成した。

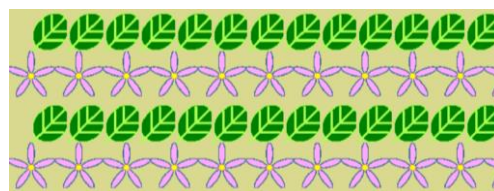


図11 花と葉っぱの模様



図12 木と葉っぱの模様

4. 結果

3. で作成したプログラムを実行すると模様入りの展開図（図 13）が出力された。そして、それを組み立てることで模様入りの円錐山脈（図 14）を組み立てることができた。その状態では模様は不揃いに見えるが、正面から見るとのようによがみのない模様を見ることができた（図 15, 16）。

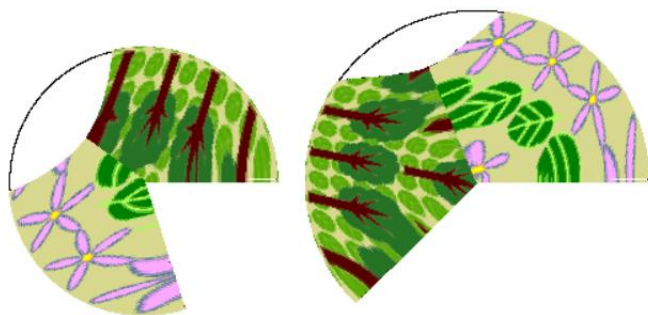


図 13 模様入りの展開図



図 14 模様入りの円錐山脈



図 15 正面から見た円錐山脈 1

図 16 正面から見た円錐山脈 2

5. 考察・課題

結果として上にあげた原理で模様を載せた展開図（図 13）を製作することができた。これは他の回転曲面（壺など）にも応用でき、展開図から模型を作ることができる立体の幅が広がった。この技術を発展させれば、仮設のイベントブースや、そこに設置するキャラクターのフィギュアなどをスペースを取らない平面の状態で輸送し、現地で組み立てることもできる。しかし、今回のプログラムでは模様を載せる場合、プログラムを実行し、模様の載った展開図を出力するのに 45 分ほどかかってしまい、大量生産には向かないことが課題としてあげられる。現状のプログラムでは模様の部分も背景の部分も同じ扱いで、指定された範囲内の点を一点一点切り取って写しているのので、出力時間を減らすにはその出力方法を根本的に変える必要がある。

5. 謝辞

大阪大学 井上豪先生、大阪大学 宇野勝博先生、大阪教育大学 串田一雅先生から研究を深化させるご助言をいただきました。

6. 参考文献

折り紙プログラミング環境（井田哲雄・高橋英和）
2003 年度日本ソフトウェア科学会第 20 回大会論文集
オリガミクス〈1〉幾何学折り紙（芳賀和夫）1999/10/1 日本評論社