良問を紹介することによる学習への意識の変化について

やまもと　しゅうへい
山本　修平

抄録：生徒たちが今まで解いてきた数学の問題の中から自分が良問だと思った問題を１題選出し、その問題を紹介しあう授業を実践した。また、自分が「どういった問題が良問と感じるのか」を考えることで、自分自身の学びにつなげ、数学の学習に取り組む意識がどう変化するのかを検証した。

キーワード：数学教育、数学の良問、協同学習

Ⅰ. はじめに

私が大学を卒業して本校に赴任するまでに勤務してきた学校は決して勉強が得意な生徒が多い学校ではなく、基本的な生活習慣を身に着けさせることを目的とした学校だった。私は前任校で教員生活を通して初めて生徒に数学Ⅲを教えたが、３年次の理系の選択者が１６名の少人数でさらにその中から大学入試の出題範囲に数学Ⅲが含まれる大学を受験した生徒は３名だった。２年前に本校に赴任した際に３年次の数学Ⅲ選択者の人数を確認すると約８０名が受講しており、そのほとんどが出題範囲に数学Ⅲが含まれる大学を受験していた。１０年以上の教員生活で生徒に数学Ⅲを教えたのは１年だけだったので、私自身が数学をしっかり学び直す必要があると感じた。３０代後半になって数学を学び直しているうちに、難易度の高い問題・低い問題にかかわらず、「これは良い問題だ」と感じる問題に出会うことがしばしばあった。授業での問題演習や定期考査でその問題を出題すると生徒の反応もよかった。そういった経験から生徒自身が良問と感じる問題はどのような問題だろう、と興味が湧いてきた。今年度は３年生の数学演習という選択科目を担当したので、生徒たちに数学の良問を見つけてきてもらい、それを紹介しあう授業を考えた。結論から申し上げると、今回の授業は決してうまくいったという手応えのある授業ではなかった。しかし、授業を組み立て実施していく中で気づいたこと、改善すべき点などを記したいと思う。

Ⅱ. 授業構想について

(1) 数学における良問とは

『良問を紹介する』という授業での「良問」の定義をどのようにするか、という部分から考えたが、どのような問題を良問だと感じるかは、人それぞれではないかという結論に至った。例を挙げると、解法が複数あるような問題、計算が複雑だがあるヒントに気づくと計算量が減るような問題、１題にその分野の基本的解法が凝縮されている問題、小問がそれぞれ次の問題のヒントになっている問題、大学入試の頻出テーマになっている問題、など様々あるが、どの問題も良問と感じ人がいれば、そう感じない人もいるだろう。ひとまず、私が良問だと感じた問題を２題挙げてみる。

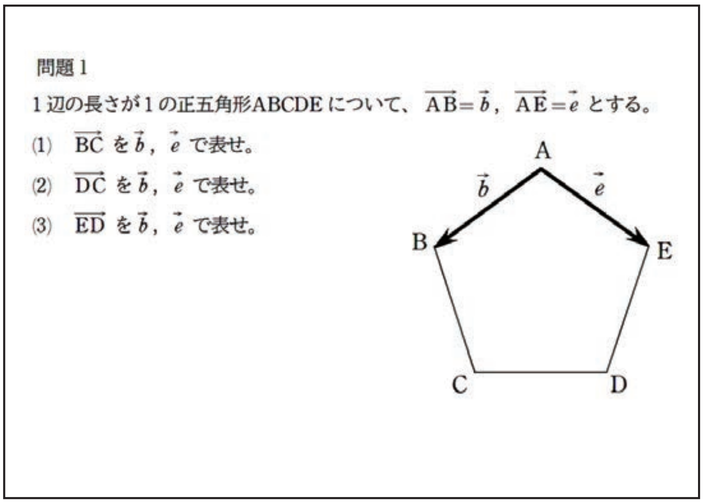


図１　ベクトル

一般的には、左図のように「正六角形ＡＢＣＤＥＦにおいて、$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき」という問題文でそれぞれの辺を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表す問題がベクトルの導入として取り扱われている。本問はそれを正五角形にすることによって、相似を使ってそれぞれの辺を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表す問題となっている。ベクトルの問題としては初級レベルだが、ベクトルの知識だけでなく図形的な発想も必要な問題である。

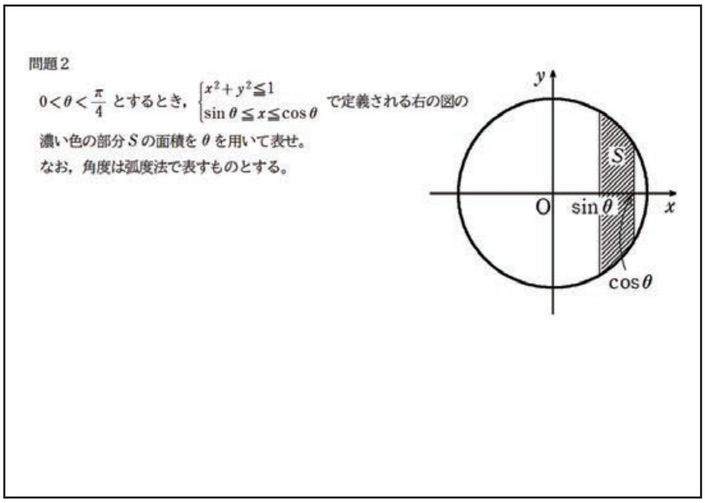


図２　円の一部の面積

スタンダードな解法は
$(\text{扇形 OAB} - \triangle\text{OAB}) - (\text{扇形 OCD} - \triangle\text{OCD})$で面積を求めるが、別解①として半円 $\left(y=\sqrt{1-x^2}\right)$ を $\sin\theta$ から $\cos\theta$ まで積分する方法と別解②として図形の合同を利用して扇形の面積を求める方法がある。問題自体は数学Ⅰを履修していれば解けるが数学Ⅲを履修した生徒は別解①を選択する可能性が高く、頭の柔らかい生徒は図形的に考えて別解②を選択するだろう。解法の難易度は
別解②＜スタンダードな解法＜別解①の順で難しくなる。１つの問題でいろいろな知識を問える問題である。

模範解答は【巻末資料３－１】巻末に載せているので、これを拝読している方々にもぜひ問題を解いてもらってこの２題の良さを感じ取ってほしい。今年度の初回の授業でこの２題を使って演習し、解説の後に、私からこの問題の良さを紹介した。そして２学期にはそれぞれが良問だと思った問題の発表をしてもらうという説明をした。

(2) 授業実施にいたるまで

この授業は２単位で同一日に２コマ実施される授業である。今年度は他教科との兼ね合いで２コマ連続ではなく、１・３時間目の授業と２・６時間目の授業だった。正直、授業者としてはやりにくい時間設定だったが与えられた条件で試みることが大切だと考えた。使用教材はスタンダード数学演習ⅠＡⅡＢ(数研出版)だったが、この教材の単元数は５６単元あり、掲載されている問題数は５９１題（例題含む）となっており、２単位の授業ですべての問題を取り扱うのは不可能である。単元を絞ったとしても、授業回数を考えないと消化不良になってしまう。１学期は私が良問だと感じた問題を中心に授業で取り扱い、「夏休みに良問を見つけてくる」ことを夏の課題として、２学期を生徒が見つけてきた問題を紹介し合うという構想を立てた。

(3) 授業プラン

数学の良問を紹介するにあたって、問題を提示して「この問題は○○といった部分が良問です」と説明を始めても、その問題の良さが伝わりにくいことは理解していただけると思う。その問題の良さを感じとるには、しっかりその問題を解き、その後解法を聞き、その上でどのような部分が良問だと感じたか、を聞くこ

とで初めてその良さが伝わるものである。その問題が難しく解くことが出来なかったとしても、最低でも１５分程度は問題に向き合い、試行錯誤しながら自分の持てる知識を総動員して考えることで、その解説を聞いたときの理解度が上がるものである。その問題の良さを感じ取るためにも同じぐらい時間をかける必要がある。そのため問題をしっかりと考える時間を確保したかったので、問題配布５分、演習時間２０分、解説２０分、振り返りアンケート５分を基本構成とした。

(4) 授業コマ数と生徒数の関係

年度当初に授業時間数と選択した生徒数を確認すると２学期の時間数１８時間で、各クラスの生徒は３４～３６人だった。１人が１コマ（５０分）を使って問題を紹介することは時間的に難しいので、複数人の班を作り、班での発表とした。具体的な２学期の授業計画は以下の通りである。(【巻末資料１】: 配布プリントより抜粋)

・問題紹介の流れ

① ペアを作る（３人も可）
② １人１題良い問題を選ぶ（２題以上でも OK)
③ 模範解答を作る
④ どういう点で良い問題と思ったか
⑤ 演習後、解説するならどういう解説をしますか
⑥ ①のペアでその問題を交換してお互い解きあう（解説は出題者がする）
⑦ ①で出来たペアを２つを１つのグループにする
⑧ グループ内で問題を交換してお互い解き合う
⑨ グループで発表する問題を選定する
⑩ 授業形式で発表（出題→演習（２０分程度）→解説（２０～３０分))
⑪ 出題された側：自分はその問題をどう感じましたか？（難易度や解答をみて）

・授業予定

時　数	１コマ目	２コマ目
1　週　目	①　　②	③　④　⑤
2　週　目	③　④　⑤	③　④　⑤
3　週　目	⑥　⑦　⑧	⑥　⑦　⑧
4　週　目	準 備 予 備	準 備 予 備
5　週　目	発　表　1	発　表　2
6　週　目	発　表　3	発　表　4
7　週　目	発　表　5	発　表　6
8　週　目	発　表　7	発　表　8

※①～⑧は上の問題紹介の流れの①～⑧が対応している。

Ⅲ．授業内容について

(1) 生徒たちが考えてきた問題の分類

授業計画の段階で生徒たちが持ち寄った数学の問題の出題範囲とさらにその詳細を分類すると以下のような結果であった。

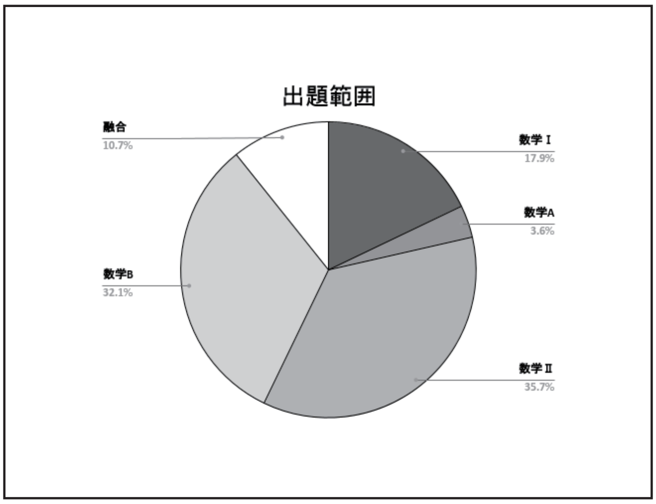


図３　出題範囲

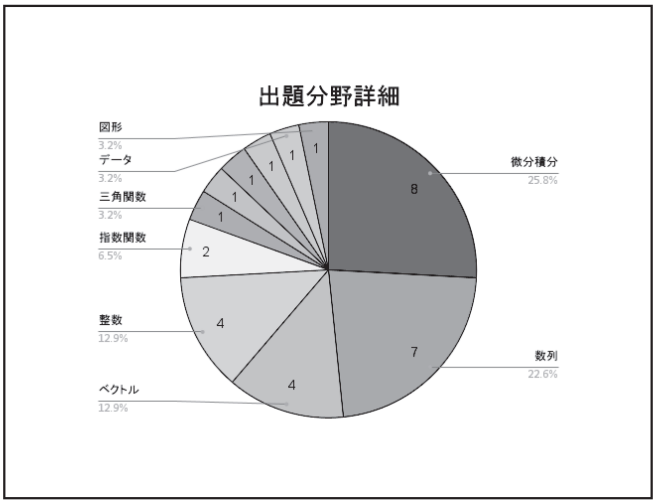


図４　出題分野詳細

これを見てみると数学Ⅱ・Ｂは数学的にも難易度が上がり内容も深くなっており、特に微分・積分、数列、ベクトルの問題における解法・考え方の部分で良問と感じる生徒が多いことがわかる。それぞれの問題を解くうえでも数学的な見方、考え方が必要で、出題パターンも幅広いことも関係しているように思う。

(2) 生徒の授業スタイル

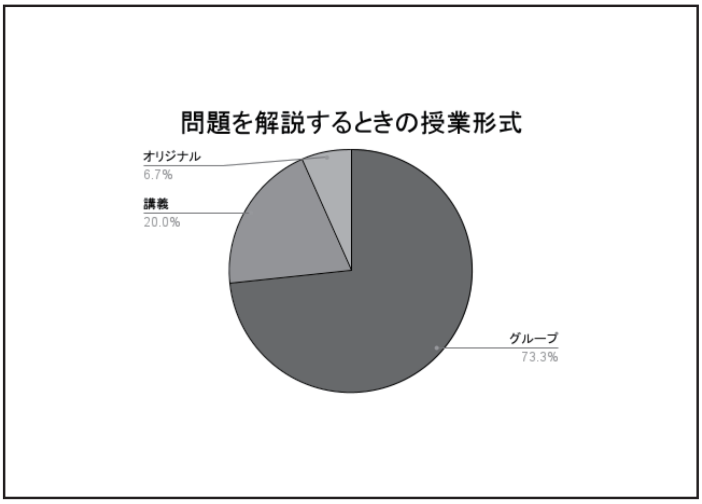


図５　授業形式

良問を紹介するときに問題の解説をどのような形式でするか、講義形式・グループワーク・オリジナルの中から事前に選択させておいた。どのような形式をとるかは班員全員の意見で選択してもらったが７０％以上の班がグループワークを選んでいた。私は講義形式５０％、グループワーク５０％の半々ぐらいだと思っていた。これは本校の生徒は中学生のときからグループワークの授業に慣れ親しんでいたこともあると思う。

Ⅳ．生徒の実態について

本講座の選択科目の内容説明は次のように記してある。「数学Ⅲの非選択者を対象に記述式入試にむけての実力を養成するため、数学Ｉ・Ⅱ・Ａ・Ｂの範囲について、問題演習を中心とした授業を行う」、つまり進路希望が国公立文系の生徒の２次試験対策の内容となっている。本校では２年次の１１月頃に選択科目の説明会を行い１２月中には選択科目を締め切っているので、その時点で国公立大学を志望している生徒が選択している。しかし、実際には新学期の４月の段階で志望校が確定している生徒は少なく、授業を進めていく途中で志望校を国公立大学から私立大学に変わり、入試科目から数学がなくなったという生徒が増えてきた。夏休み前に志望校を国公立大学から私立大学に変更した生徒は２０％もいた。今回の良問を紹介するという内容は、夏休みに数学の学習時間が増え、数学の問題に触れる機会も増えることを想定している内容だっ

たため、そこは想定外だった。また、生徒たちは附属中学校で何度もグループ発表や調べ学習の発表をしているので、生徒たちには良問を発表する（紹介する）ことへのハードルはなかったが、その発表を聞く生徒たちへの聞き方には課題があると感じていた。具体的には、自分が興味関心のない内容のときは、発表を聞かずに違うこと（いわゆる内職）をする生徒が学年が上がるごとに増えているということである。そのため今回の授業では発表を聞いているときの自分の取り組みについての評価を振り返りシートに載せた。

Ⅴ．授業実践からみえた課題

(1) 良問を紹介するということ

冒頭でも申し上げたように、今回の授業は決してうまくいった授業ではなかった。そのように感じた１番の部分は、『良問を紹介する』という部分が生徒にうまく伝わっておらず、生徒の発表が出題→演習→解説という流れで終わってしまっていた。今回の授業テーマは「良問を見つけ､それを紹介する」という部分だったが、「生徒が自分で用意した問題を使って授業をする」というテーマのような授業になってしまっていた。１学期は私が良問だと感じた問題を授業で取り扱っていたので、そのときから解説の後に「どういった部分で良問と感じたのか」をしっかりと説明し、生徒たちに良問を味わうという経験を積ませればよかったと反省している。生徒たちのこれまでの数学の授業の中では自分の答えが合っているかどうか、に重きが置かれていたが、その問題の魅力を感じ取るという部分に焦点をあてた授業をするほうが良かったと思う。次に良問を紹介する側の生徒、紹介される側の生徒の立場から見えた課題を挙げたいと思う。

(2) 良問を紹介する側の生徒

良問を紹介する側の生徒は、その問題の良さを紹介するということよりも、その問題を使って授業をするという部分に重きを置いたような授業になってしまった。また複数人の班で発表させたが､班の生徒全員が、その問題の良さはどこなのかということを理解しておらず、授業をすることに気持ちが偏っていたように感じた。準備段階でもっと私とのやりとりを重ね､その問題の良さはどこなのか､その良さをどう伝えるのか､を考えさせる必要があったと反省している。

(3) 良問を紹介される側の生徒

紹介される側の生徒が数学を得意としている場合は、演習を通してその問題の良さを理解していたが、数学を苦手としている場合は、その良さを理解しているとは言い難かった。それは良問を紹介する側の生徒が「どういった点で良問と感じたか」を説明する時間を設けなかったこともあるが、良問を紹介された側の生徒が「良問を紹介されるということ」がよくわかっていないようだった。回数を重ねるうちに感じたのが「良問を紹介される＝その問題の良さを味わう」という表現の方が生徒たちにとって身近な表現なのではないかと感じた。問題が解けた生徒も、解説が始まったときに、答えが合っているか、合っていないかを気にしすぎているように感じた。授業や塾、問題集などでも「数学の問題＝答えを出す」という部分にポイントが置かれている傾向にある。そういった意味でも授業では、答えを出すことよりも問題の背景や考え方、答えからわかることなど､1つの問題から複数のことを学べるような授業を考えていかなければならないと感じた。

(4) 生徒たちの反応

生徒が自分たちで用意した問題を紹介する段階になったときに、私は授業を受けている生徒たちの反応をみていた。授業者の生徒たちの解説の仕方は、板書を用いる班・グループワークを用いる班・パワーポイントを用いる班など様々なスタイルがあったが、授業を受けている生徒たちからはグループワーク形式で相談しあう方が理解しやすいという声があがっていた。この声を聞いて私自身の普段の授業でももっとグループワークを取り入れていきたいと感じた。また、生徒たちが良問として用意した問題の半分程度は京都大学の過去問や京都大学の実戦模試などの難問が多かった。正直この講座を選択している生徒の学力からはかけ離れたレベルの問題が多く、演習の時間に手も足も出ない問題も複数あった。手も足も出ない問題に対しては解答解説を聞いても理解できないことも多く、そういった問題は生徒の事後アンケートも良くなかった。生徒が用意した問題を事前に目を通し、私自身も難しすぎると感じた問題もあったが、「生徒が良問と感じ、自分たち話し合って発表する問題を決めた」という部分を大切にしたかったので生徒の判断を尊重したが、授業として５０分の時間を使うということを考えるなら、もっと全体の学力に適する問題を選択するように

指導すべきだったのではないかと反省している。私が難しすぎると感じた問題の生徒の事後アンケートは以下のようになっている。

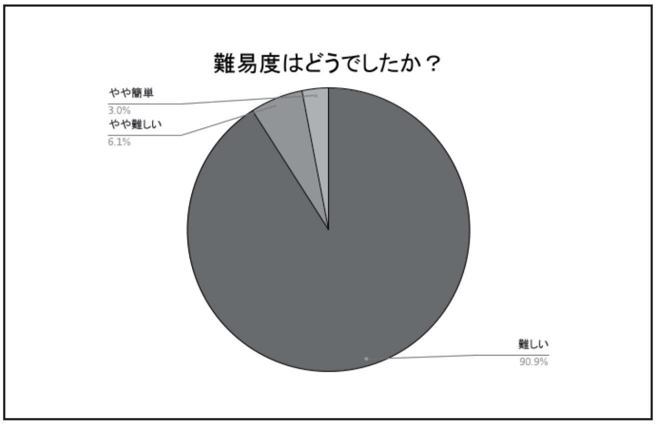


図６　難易度はどうでしたか？

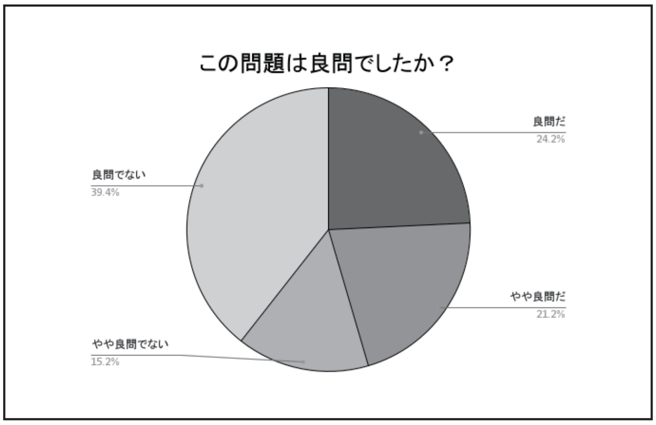


図７　良問でしたか？

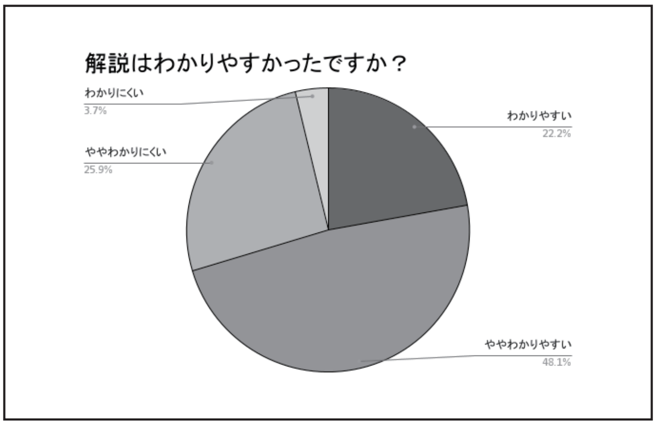


図８　解説はわかりやすかったですか？

(5) 授業の評価

すべての班の発表が終わった後に全体に対して今回の授業についてアンケートを取った。多くの生徒が紹介された問題の魅力を共有できたと回答していたが、数学の問題を解くときの意識が変わったという部分まで踏み込むことは出来なかった。これはこの授業を進めていく段階の改善点にも挙げたように、「良問の魅力を味わう」という部分が、「良問を使って自分たちで授業をする」、というように生徒たちの意識が変化していったからではないかと思う。もう少し良問を紹介するということがどういうことなのかを生徒に伝えなければならないと思った。

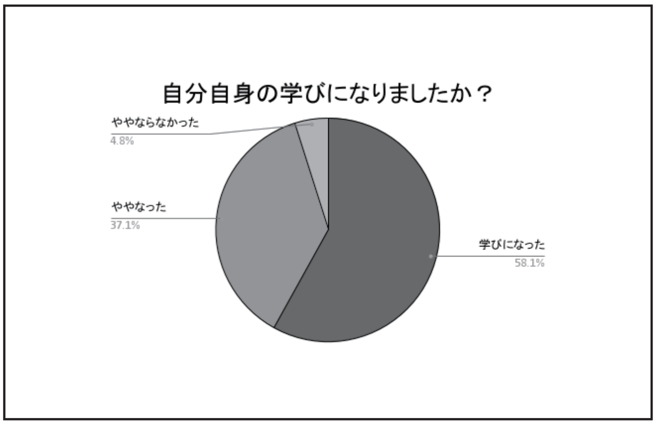


図９　自分自身の学びになりましたか？

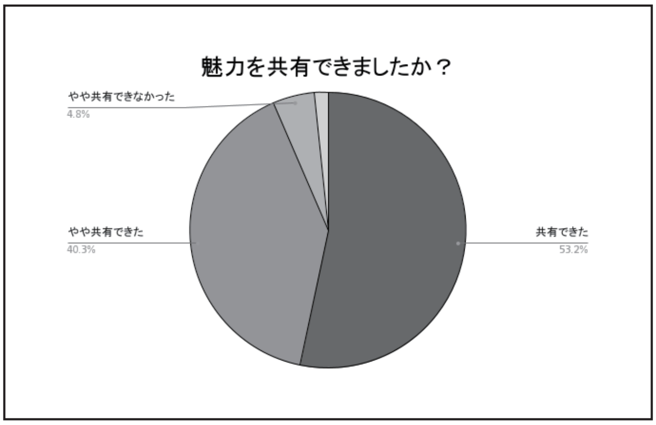


図１０　魅力を共有できましたか？

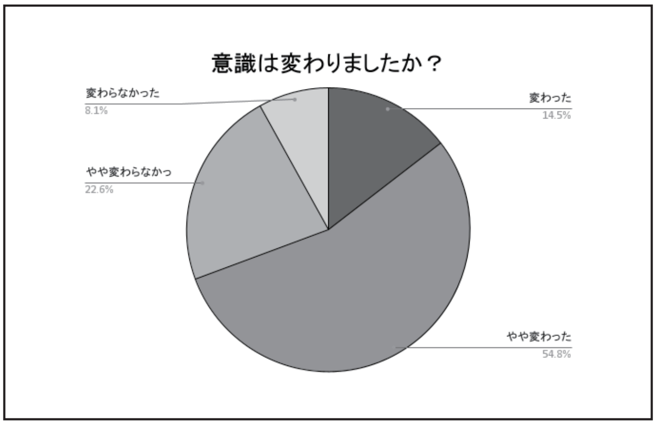


図１１　意識は変わりましたか？

Ⅵ. 授業を終えて

今回の授業は生徒たちに良問を見つけ出し、それを紹介することで今までとは違った視点で数学に取り組んでもらいたいという目的だった。しかし、前述の通り授業を進めていく中でその目的が違った方向に進んでいた。私自身がこういった形式の授業を試みるのが初めてだったこともあり、途中で生徒たちの気持ちを修正することは出来なかった。次に同じような授業をするときにはしっかりと目的がブレないような授業プランニングをしたいと思う。今回の授業に対しての感想や意見もアンケートをとったが、もう１回やりたい。授業の仕方はとてもよかった。など肯定的な意見が多かった。高校３年生の演習の授業として講義形式で問題演習中心の授業をするよりも今回の授業の方が生徒たちも活動的に授業に参加できたのではないかと思う。最後に生徒が用意した問題の中で私も良問だと感じた問題を２題紹介したいと思う。

生徒の問題１

方程式 $2\cos 2\theta + 3a\cos\theta + 2 - a^2 = 0$ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲にちょうど３つの解をもつような定数 a の値を求めよ。

図１２　三角関数

これは三角関数の方程式では定番の問題であるが、方程式の解と $\cos\theta$ と解の対応関係を理解していないと解くことは出来ない問題である。決して難しい問題ではないが、三角関数の理解度を計るには適切な問題ではないかと思う。難問や入試問題の大問から選出するのではなく、教科書傍用問題集にも記載されているような問題を選出するところにセンスを感じた。この問題は残念ながら、クラス発表されることはなかったが、個人的に評価したい問題であった。

生徒の問題２

x の方程式 $x^3 - 3x - a = 0 \cdots$ ①（a は実数の定数）について、

(1)　①が異なる3つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　①が1つの正の解と異なる2つの負の解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3)　(2)のとき、①の異なる3つの実数解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ $(\alpha < \beta < \gamma)$ とする。
$|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$ のとり得る値の範囲を求めよ。

図１３　微分

これは微分の範囲の問題であり (1), (2) は定数分離で a を分離し、増減表を用いてグラフをかくと解ける問題である。しかし、(3) は微分の知識だけではなく他の分野の知識も取り入れて考える必要がある問題である。また難易度も本講座を受講している生徒に適切な難易度であった。この問題は授業で発表されており、他の生徒からの評価も高かった問題である。

Ⅶ．主な参考文献・サイト

『大学への数学　１対１対応の演習　数学Ｂ』東京出版
『2022 スタンダード数学演習Ⅰ・Ⅱ・Ａ・Ｂ　受験編』数研出版
『理系数学の良問プラチカ　数学Ⅰ・Ⅱ・Ａ・Ｂ』河合出版
『受験の月』https://examist.jp/

【巻末資料１】配布プリント（問題紹介の流れ、授業予定）

良い問題を解こう！

・問題紹介の流れ

①　ペアを作る（３人も可）
②　１人１題良い問題を選ぶ（２題以上でもOK）
③　模範解答を作る
④　どういう点で良い問題と思ったか
⑤　演習後、解説するならどういう解説をしますか
（②〜⑤：ワークシート（裏面参考））
⑥　①のペアでその問題を交換してお互い解きあう（解説は出題者がする）
⑦　①で出来たペアを２つを１つのグループにする
⑧　グループ内で問題を交換してお互い解き合う
⑨　グループで発表する問題を選定する
⑩　授業形式で発表（出題→演習（２０分程度）→解説（２０〜３０分））
⑪　出題された側：自分はその問題をどう感じましたか？（難易度や解答をみて）

・授業予定

時数	1コマ目	2コマ目
1週目	①②	③④⑤
2週目	③④⑤	③④⑤
3週目	⑥⑦⑧	⑥⑦⑧
4週目	準備予備	準備予備
5週目	発表1	発表2
6週目	発表3	発表4
7週目	発表5	発表6
8週目	発表7	発表8

※①〜⑧は上の問題紹介の流れの①〜⑧が対応している。

【巻末資料２】ワークシート

良い問題を解こう！　（授業用ワークシート）　　班のメンバー（代表者を先頭に記入）［　　　　　　　　］

○分　野　（　　　　）
○難 易 度　S ・ A ・ B
○時間設定　（　　　　）分
○出　典　＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
○この問題をどのように解説しますか？
・講義形式
・グループワーク
・オリジナル
○必要なものがあれば記載してください
（例：チョーク・三角定規・プロジェクターなど）

○この問題のポイントはどこですか？
(良い問題と感じた理由ではなく、解く・考える上で大切な部分)

○板書計画　（足りない場合は裏面を使ってください）

【巻末資料３－１】本文内の問題の解答

【巻末資料３－１】

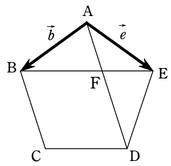
問題１ 解答

線分BE と線分AD の交点をF とすると、△ABE ∽ △FEA（∵　二角相当）より

対角線の長さを x とおくと、AB:BE ＝FE :EA より　$1:x=\mathrm{FE}:1 \Leftrightarrow \mathrm{FE}=\dfrac{1}{x}$

また、$\mathrm{BE}=\mathrm{BF}+\mathrm{FE} \Leftrightarrow x=1+\dfrac{1}{x}$　（△ABFは二等辺三角形）

よって、 $x^2+x-1=0$ より $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (x>0)$



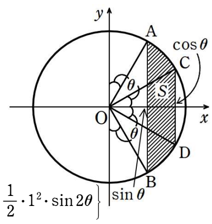
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}=(\vec{e}-\vec{b})+x\vec{b}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{b}+\vec{e}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\dfrac{1}{x}\overrightarrow{\mathrm{EB}}=\dfrac{1}{x}(\vec{b}-\vec{e})=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}(\vec{b}-\vec{e})=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(\vec{b}-\vec{e})$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\overrightarrow{\mathrm{EB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(\vec{b}-\vec{e})+x\vec{e}=\vec{b}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{e}$

問題２ 解答

円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x=\sin\theta$ の交点のうち，y 座標が正のものを A，負のものを B とする。
また，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x=\cos\theta$ の交点のうち，y 座標が正のものを C，負のものを D とする。
このとき，図の濃い色の部分 S の面積は



{(扇形 OAB)－△OAB}－{(扇形 OCD)－△OCD}

$=\left\{\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\pi-2\theta)-\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)\right\}-\left\{\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta-\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin2\theta\right\}$

$=-2\theta+\dfrac{\pi}{2}$

別解 ①（数Ⅲ積分）

円 $x^2+y^2=1$ の $x>0$，$y>0$ の部分の方程式は $y=\sqrt{1-x^2}$ より
図の濃い色の部分 S の面積は

$S=2\times\displaystyle\int_{\sin\theta}^{\cos\theta}\sqrt{1-x^2}\,dx\ \cdots(*)$

ここで、 $x=\sin t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$

x	$\sin\theta$	$\to$	$\cos\theta$
t	θ	$\to$	$\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$(*) \Leftrightarrow 2\displaystyle\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta}\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt$

$=2\displaystyle\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta}\cos^2 t\,dt$

$=2\displaystyle\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta}\dfrac{1+\cos2t}{2}dt$

$=\displaystyle\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta}(1+\cos2t)dt$

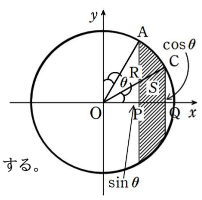
$=\left[t+\dfrac{1}{2}\sin2t\right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}-\theta}$

$=\dfrac{\pi}{2}-\theta+\dfrac{1}{2}\sin(\pi-2\theta)-\left(\theta+\dfrac{1}{2}\sin2\theta\right)$

$=\dfrac{\pi}{2}-\theta+\dfrac{1}{2}\sin2\theta-\theta-\dfrac{1}{2}\sin2\theta=\dfrac{\pi}{2}-2\theta$

別解 ②（図形的解法）

円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x=\sin\theta$ の交点のうち，
y 座標が正のものを A，直線 $x=\sin\theta$ と x 軸との
交点を P とする。また，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x=\cos\theta$
の交点のうち，y 座標が正のものを C，直線 $x=\cos\theta$
と x 軸との交点を Q とし、辺AP と辺OC の交点をR とする。



△OAP ≡ △COQ（三辺相当）で、
△OAR ＝△OAP－△OPR 、四角形PQCR＝△COQ－△OPRより
△OAR＝四角形PQCR

よって、斜線部APQC ＝ 扇形OAC である。

扇形 OAC $=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)$

よって、図の濃い色の部分 S の面積は、2 ×扇形 OAC= $\dfrac{\pi}{2}-2\theta$

【巻末資料３－２】本文内の問題の解答

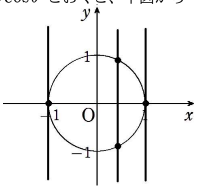
【巻末資料３－２】

生徒の問題１ 解答

$2(2\cos^2\theta-1)+3a\cos\theta+2-a^2=0$

$4\cos^2\theta+3a\cos\theta-a^2=0 \cdots ①$

ここで $t=\cos\theta$ とおくと、下図から



$-1<t<1$ のとき　1つの t に対してθが２個

$t=\pm1$　のとき　1つの t に対してθが１個

対応するので

$4t^2-3at-a^2=0 \cdots ②$

$(t+a)(4t-a)=0$

$t=-a,\ \dfrac{a}{4}$

①がちょうど３つの解をもつには、②の解のうち１つが ±1 であり

もう１つが $-1<t<1$ の範囲にあればよい。

$-a=\pm1$ のとき　$t=\dfrac{a}{4}=\mp\dfrac{1}{4}$ となり $-1<t<1$ を満たすが、

$\dfrac{a}{4}=\pm1$ のとき　$t=-a=\mp4$ となり $-1<t<1$ を満たさないので不適。

よって $a=\pm1$

生徒の問題２ 解答

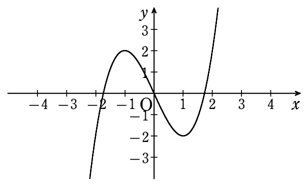
(1)　方程式①は $x^3-3x=a$ と変形するので、①の実数解は、

$y=x^3-x$ と $y=a$ の共有点の x 座標と一致する。

ここで、$f(x)=x^3-3x$ とすると、

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ であり、$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗



$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり、

$y=f(x)$ と $y=a$ が3つの共有点をもつ

ような a の範囲を求めればよいので、

$-2<a<2$

(2)　$y=f(x)$ と $y=a$ が「$x>0$ の範囲に１つ」、「$x<0$ の範囲に２つ」の共有点をもつような a の範囲を求めればよいので　$0<a<2$

(3)　$0<a<2$ のとき、

$\alpha<0,\ \beta<0,\ \gamma>0$ であるから、$A=(-\alpha)+(-\beta)+\gamma=-(\alpha+\beta)+\gamma \cdots ②$となる。

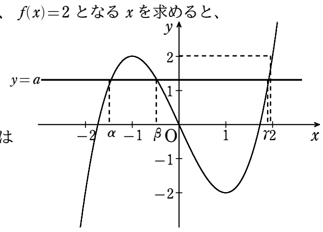
ここで、$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は①の解であるから、解と係数の関係により、

$\alpha+\beta+\gamma=0$

が成り立つから、$\alpha+\beta=-\gamma$ である。よって、②より、

$A=-(-\gamma)+\gamma=2\gamma$ となる。

γ のとり得る値の範囲を調べるために、$f(x)=2$ となる x を求めると、



$x^3-3x=2$

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$x=-1,\ 2$

よって、グラフより γ のとり得る範囲は

$\sqrt{3}<\gamma<2$ であり、

$2\sqrt{3}<2\gamma<4$

$2\sqrt{3}<A<4$

以上より、$A=|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$ のとり得る値の範囲は、

$2\sqrt{3}<|\alpha|+|\beta|+|\gamma|<4$

Changes in students' attitudes toward learning by introducing good questions to each other

YAMAMOTO Shuhei

Abstract: Students selected one question which they thought was a good question among questions they had solved so far and then introduced the question to each other in class. By thinking about what kind of questions were good questions, the students were able to connect this to their own learning. The purpose of this study was to examine how their attitudes toward learning mathematics changed.

Key Words: Mathematics education, Good Question, Collaborative Learning