3次方程式を用いて三角比の表をつくる

武部（たけべ）　真子（まこ）

１．はじめに

数学の教科書には、当たり前のように記載されているがその経緯が述べられていないことが多々あり、それに対して疑問を持つ生徒も少なからずいる。また、授業をしているとたくさんの質問が出る。その質問のうち９割が解法についてだが、１割は意表を突かれるような素朴な質問である。

以下、実際に授業内で出た生徒の質問を３つ紹介する。

① 数学Ⅱ【２次方程式】
「虚数単位の i はふつうの文字と同様に扱う」の「ふつう」とは何か？
→ a はふつうの文字なのか？ π はふつうの文字なのか？「ふつう」ではない文字はあるのか？
「ふつう」の定義は何なのか？

② 数学Ⅱ【２次方程式】
「今後、特に断らないかぎり、係数が実数である２次方程式を扱う　～（略）～　解は複素数の範囲で考える」について、係数を「実数」に制限するのはなぜか？
→解を「複素数」の範囲で考えるならば、係数も「複素数」で考えればいいのではないか？

③ 数学Ⅰ【三角比】数学Ⅱ【三角関数】
「教科書の巻末にある三角比の表（１年）三角関数表（２年)」について
→普段は有名角しか使わないが、１°や２°をどうやって発見したのか？どうやって表をつくったのか？
(①～③の「　」内はすべて教科書　数学Ⅱ Advanced（東京書籍）から抜粋)

このような生徒たちの疑問について、クラス全員で議論・考察・試行錯誤する時間を設けたいが、ほとんど触れない、または、ほんの少しだけクラス全体で考える時間を設ける程度で終わってしまうのが現状である。そこで、今回の授業では上記③の疑問について、クラス全体で考える機会を設け、答えが明確に出るかわからない・解決できるかわからない問題に対して生徒たちと一緒に議論・考察・試行錯誤したいと考えた。

２．コンピテンシーについて

（１）中・高 数学科として生徒に育みたいコンピテンシー
「活きてはたらく数学的資質・能力の育成」

（２）中・高数学科としてのルーブリック
[1] 定義から定理・公式・性質を導出するプロセスを理解できる
[2] 個々の定理・公式・性質を使うことができる（複数のそれ等を組み合わせて使うことはしなくてよい）
[3] 問題を見つけることができる
[4] 数学（定理・公式・性質 等）を組み合わせ駆使すれば解決できそうな形に、問題を理想化できる
[5] 実際に数学（同上）を適用し、解を導くことができる
[6] 解として相応しいか否かを判断できる
[7] 相応しいと判断したならば、[3] から [6] までのプロセスを数・文字・式を用いて説明できる

[8] [1] から [7] までを何度もくり返し、拡張・一般化等を経て自分なりのコンパクトな数学を構築できる
[9] 以上の活動を通して、自分なりの数学観を持つことができる

< 補足 >
① [4] に記した“理想化”とは、本質を失わない程度に構成要素を捨象したり、或いは帰納法により現実世界の問題を数学で解決し易いものに変形・近似することを言います。「数学的モデリング」「文化の解析」といった活動には必要となります。
② [3] での“問題”が自然現象・社会現象といったものならば理想化が必要となり（[4] の力が育まれ）、文化（即ち人間が創作したもの）の場合には理想化の要・不要は断定できません。また、数学世界の問題の場合には理想化は不要です。
③ [5] の言う“数学の適用・解の導出”には「問題を多角的に考察する姿勢」「解法の背後にある体系的なものを見抜く力」「筋道立った考え方を以て試行錯誤をし続けられる粘り強さ」といったものが必要であり、また育まれます。
④ [7] の力は、換言するならば“他者に分かり易い解答を書ける力”といった所でしょうか?!

（３）本時で特に重視したいルーブリック
上記の [4] と [6]

３．授業実践

（１）学習計画および学習内容

	内容
第１限	測量以外で三角比の表をつくるためには、有名角（鋭角ならば 30°　45°　60°）の三角比の値だけではつくることができないので、何度の三角比の値を求めることができれば三角比の表の完成に近づくかを考える。 →１° の三角比の値さえわかれば加法定理を用いて何度でも求まるのではないか →１° の三角比の値を求めるにはどうすればよいか（ひとまず正弦の値で考える） →いきなり sin 1° を考えるのは難しいので、できるだけ小さな角の正弦を求める →相似・加法定理などから sin 3° の値ならば求まりそうである → sin 3° を求める（グループワーク）
第２限 本時	sin 3° の値を求めたあと、sin 1° の値を求めるにはどうすればよいかを考える。 →角度の値が３倍になっていることから３倍角の公式を利用して３次方程式　…（※） 　をつくることができる →（※）の解をどのように求めるのか？ →（※）を解くために試行錯誤する（グループワーク）
第３限	第２限で（※）をどのように解くかの議論に時間を要し、実際に解くまでに至らなかった班もあると思うので、（※）を解くことを最優先する。解く作業が難解で時間がかかると思われるが、もし解き終わった班がある場合は似たような形の解が３つ求まるがどれが sin 1° の値なのかを考える。 →そもそも解くことができるのか？解けたとしてもどのように sin 1° の値をつきとめるのか？ 　余裕があれば他の２つの解は何が求まったのかについても考える（グループワーク）

（２）目標
生徒たちが昨年度から抱いている疑問について、クラス全体・学年全体で試行錯誤する。その際、疑問を解決することを目標とするのではなく、主体的に数学的活動を行うことを目標とする。また、それと同時に既習事項をたくさん活用しながら粘り強く考察する力を養う。

（３）評価規準

①知識・技能	②思考・判断・表現	③主体的に学習に取り組む態度
今回の授業において必要な知識(相似（中３）、２次方程式の解法(高１)、加法定理（高２）、２倍角の公式(高２)、３倍角の公式(高２）など) を理解している。また、それら一つ一つを事象に活用することができる。	今回の授業において必要な知識(道具) が何かを明らかにすることができる。論理的に考察し、表現するとともに、粘り強く取り組むことができる。	普段とは違い、解決できるかどうかもわからない課題において、今までの知識を活用し試行錯誤している。また、その考察をグループ内・クラス内で共有・議論することでより深く考察しようとしている。

（４）本時の展開

時間	学習内容	指導上の留意点	評価の観点 上記 (3) 参照
導入 １０分	・前回の振り返り →前回どのような過程を経て、sin ３°の値を求めたのかを振り返る。 ・本時の目標「sin １°を求める」を理解する。	・前時において、どのような知識を活用したのかを復習できるような流れをつくる。	①
展開 ３５分	・sin ３°の値から sin １°の値をどのよう求めるのかを考える。 →３次方程式…（※）を立てる →（※）を解く際に、因数分解ができない・因数定理を使えない →どのように解くのか？	・３倍角の公式を用いて３次方程式をつくることができる点に気づかせる。 ・（※）を解くにはかなりの時間を要すると予想される。実際に算出可能かどうかはひとまず置いておき、理論上の方針だけでもいいので試行錯誤するように促す。 ・（※）を解くことは難しく既習の因数定理などが使えないが、解法はたくさんあると考えられる。生徒が見つけた様々な解法の中で、班で少なくともどれか一つに挑戦させる。また、様々な解法が出てくると予想されるので、できるだけクラス内で共有する。	①③ ②③
まとめ ５分	・本時の振り返りを行う。	・生徒たちの疑問について既習内容の知識をたくさん活用しながら「試行錯誤」できたならば、目標達成といえることを伝える。	

４．授業の流れ

＜第１限＞

三角比の表をつくるには？

→表の値は、特に有名角以外の値はどのように算出したのか？

→そもそも１°の三角比の値さえわかれば加法定理を用いて何度でも求まるのではないか

→まず正弦で考えるとして sin １°を求めよう

→いきなり１°は難しいが、できるだけ小さい角度なら何度が求まるか

→数学Ⅰで正五角形から sin36°を求めることができた、そこから sin18°も求まりそうである、さらに有名角から sin15°も求まりそうである

→できるだけ小さい角も sin ３°が限界か？

→ sin １°を求めることはできないのか？

→３倍角の公式から３°と１°の関係式（３次方程式）を立てることができる

→しかしこの３次方程式をどう解くのか？

→便利な因数定理は使えない・・・

→試行錯誤・・・

実際は、4クラスとも生徒から「正五角形」「36°」などのワードが出てきたので、思いのほか円滑に進み、ほとんど全員が sin ３°まで求めることができた。

＜第２限＞本時

sin ３°をどのように導出したのかを振り返る

→ sin １°を求めるために班で活動（グループワーク）

授業の展開・実際の生徒の様子などは、“３．授業実践（４）”“８．授業を終えて”を参照。

＜第３限＞

引き続き各班の取り組みの続き

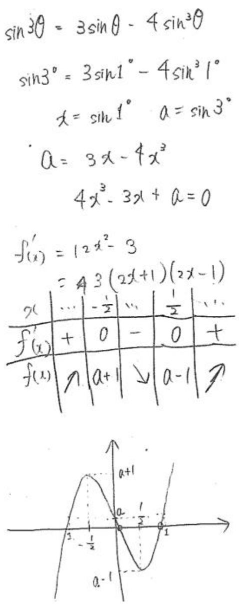
→前時「sin １°を求める」において解決に向けて進んだ班による発表

→実際に発表班のように再チャレンジ　または　引き続き班の取り組み

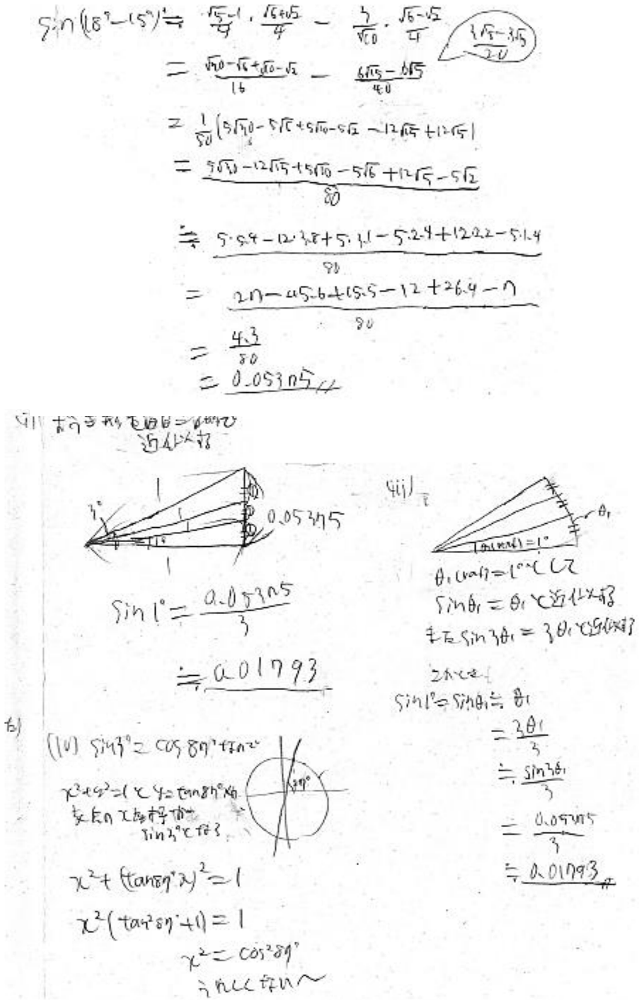
→解説スライドで説明を行う（“６．解説スライド”参照）

実際は、「sin １°を求める」において解決に近づき発表までできた班が出てきたのは１クラスで、残り３クラスはクラスによって流れが少し異なった。班活動を引き続き行いたいというクラスについては、再び時間をとり最後に解説を行った。班活動がすっかり手詰まりになったクラスについては、こちらから解説スライドを徐々に見せ、クラス全体で同じ作業を行った。計算結果が違っていたり、考え方がわからないなどの質問が出たが、グループワーク形式で行ったため、生徒同士でよく議論しその都度グループ内で解決できていた。ときには班を飛び越えての議論や教え合いなどもあり、こちらが直接生徒の質問を受けることはほとんどなかった。

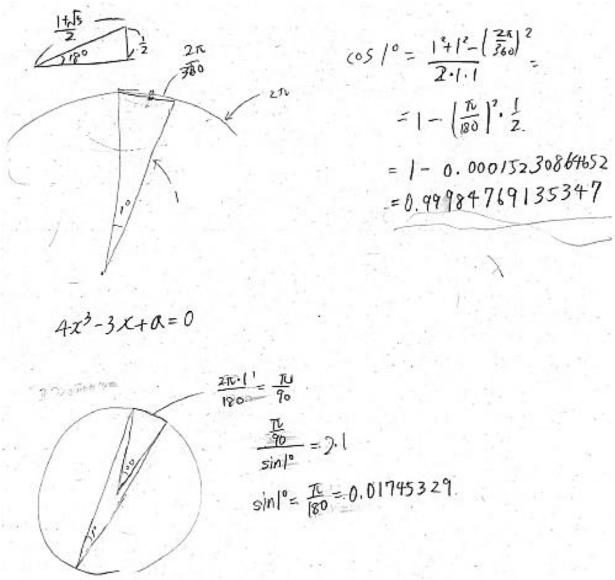
５．実際の生徒の解答・生徒の様子



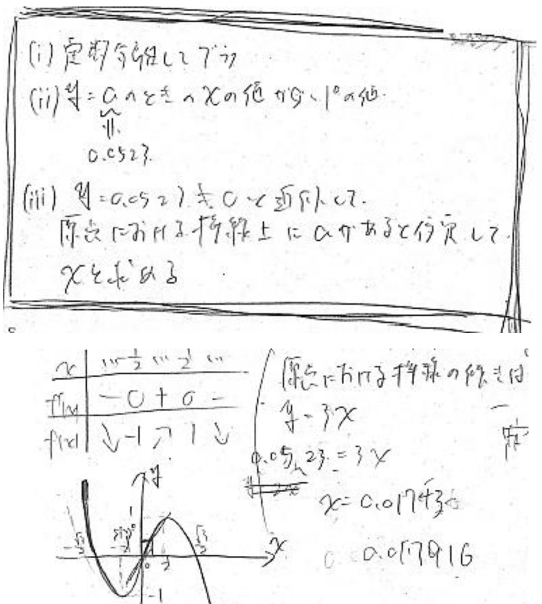
定数分離して３次関数のグラフから



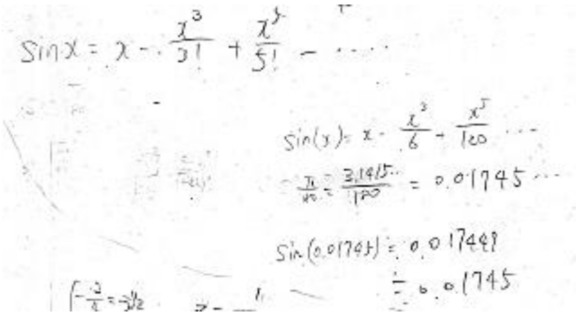
おうぎ形を直角三角形で近似



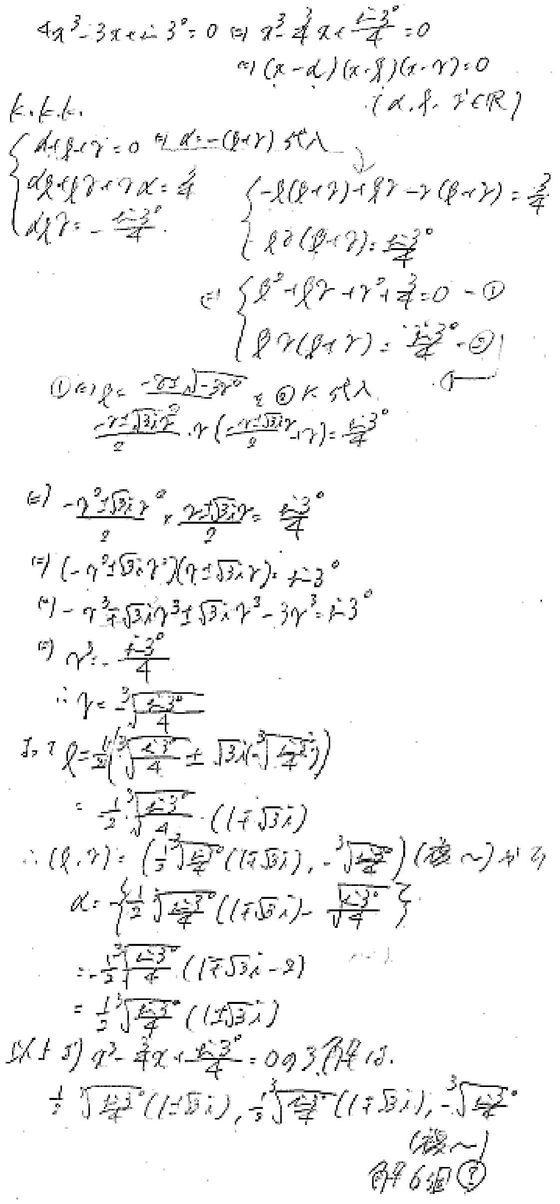
円の中心角を１° にする



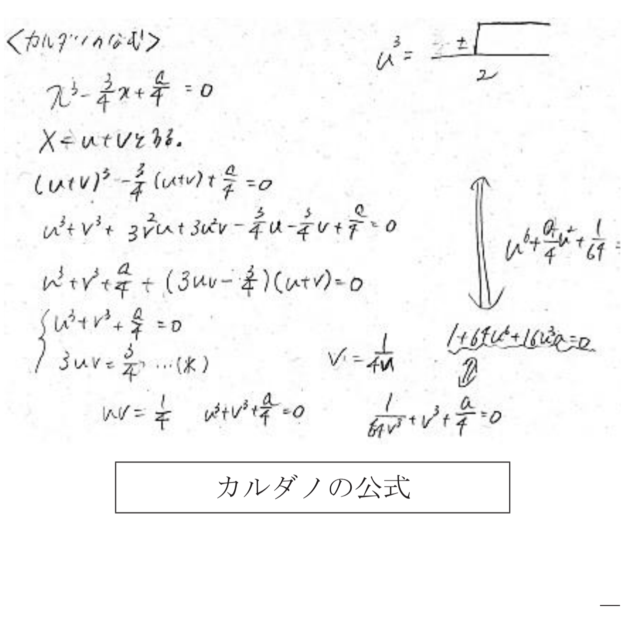
３次関数の接線の傾きから近似



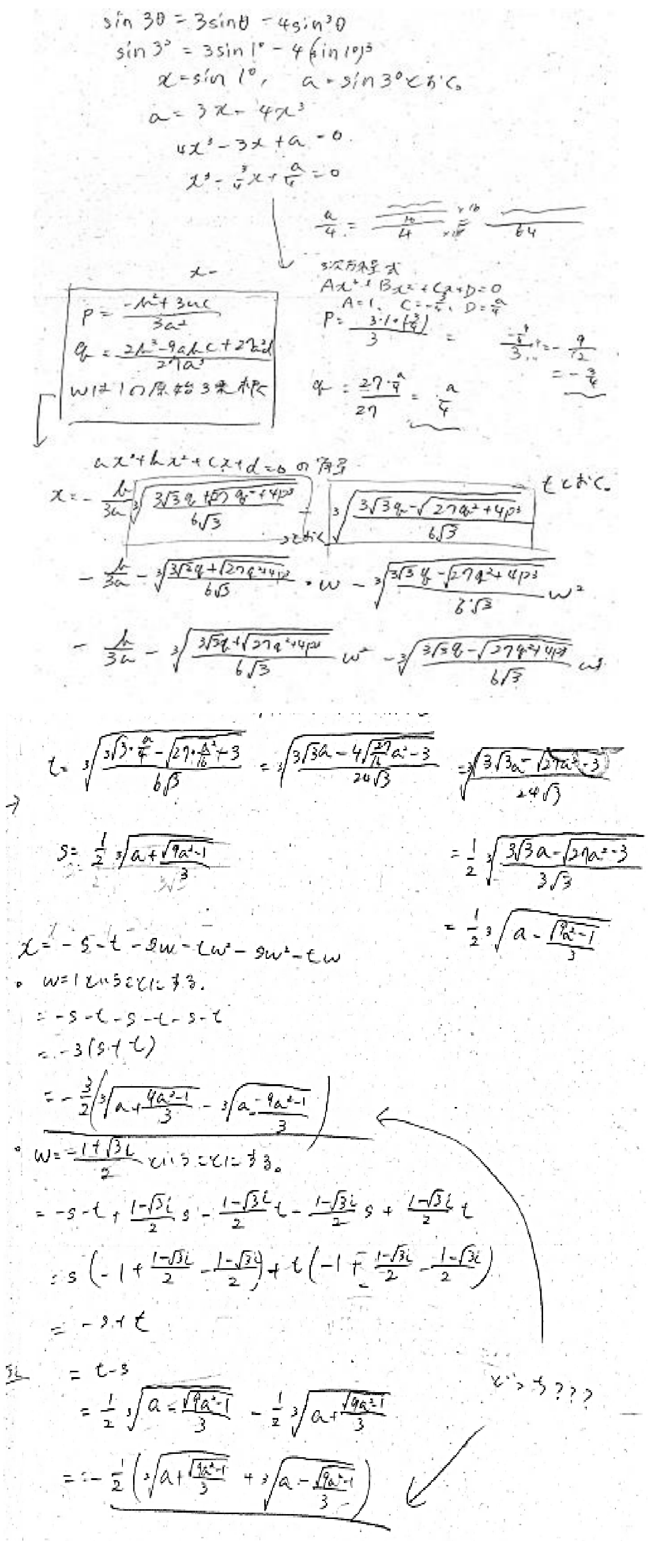
マクローリン展開



3 次方程式の解と係数の関係



カルダノの公式



3 次方程式の解の公式

$\sin 3\theta = \sin 3^\circ$ を解く。

$(0^\circ \leq \theta < 360^\circ)$ $\quad 0^\circ \leq 3\theta < 1080^\circ$

$3\theta = 3^\circ, 177^\circ, 363^\circ, 537^\circ, 723^\circ, 897^\circ$

$\theta = 1^\circ, 59^\circ, 121^\circ, 179^\circ, 241^\circ, 299^\circ$

$\sin 1^\circ = \sin 179^\circ$

$\sin 59^\circ = \sin 121^\circ$

$\sin 241^\circ = \sin 299^\circ$

$\sin 3\theta = \sin 3^\circ$

$\sin\theta = x$ とすると

$3x - 4x^3 = \sin 3^\circ$

$-4x^3 + 3x - \sin 3^\circ = 0$ の解は

$\sin 1^\circ, \sin 59^\circ, \sin 241^\circ$ である。ただ

$-4x^3 + 3x - \sin 3^\circ = 0$

$\Leftrightarrow \underline{4x^3 - 3x + \sin 3^\circ} = 4(x - \sin 1^\circ)(x - \sin 59^\circ)(x - \sin 241^\circ) = 0$

$\sin 59^\circ = \sin(60^\circ - 1^\circ) = \sin 60^\circ \cos 1^\circ - \cos 60^\circ \sin 1^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 1^\circ - \frac{1}{2}\sin 1^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}\cos 1^\circ - \sin 1^\circ}{2}$

$\sin 241^\circ = \sin(240^\circ + 1^\circ) = \sin 240^\circ \cos 1^\circ + \cos 240^\circ \sin 1^\circ$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 1^\circ - \frac{1}{2}\sin 1^\circ$

$= -\frac{\sqrt{3}\cos 1^\circ + \sin 1^\circ}{2}$

解と係数の関係より

$-\frac{\sin 3^\circ}{4} = \sin 1^\circ \cdot \sin 59^\circ \cdot \sin 241^\circ$

$= \sin 1^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}\cos 1^\circ - \sin 1^\circ}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}\cos 1^\circ + \sin 1^\circ}{2}\right)$

$= -\sin 1^\circ \cdot \frac{3\cos^2 1^\circ - \sin^2 1^\circ}{4}$

$= -\sin 1^\circ \cdot \frac{3(1 - \sin^2 1^\circ) - \sin^2 1^\circ}{4}$

$= -\sin 1^\circ \cdot \frac{3 - 4\sin^2 1^\circ}{4}$

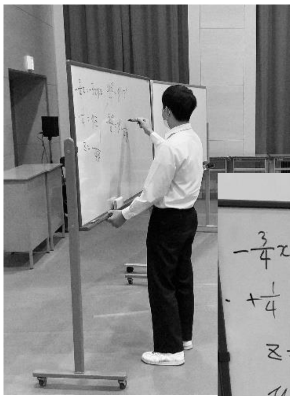
$= \frac{1}{4}(4\sin^3 1^\circ - 3\sin 1^\circ)$

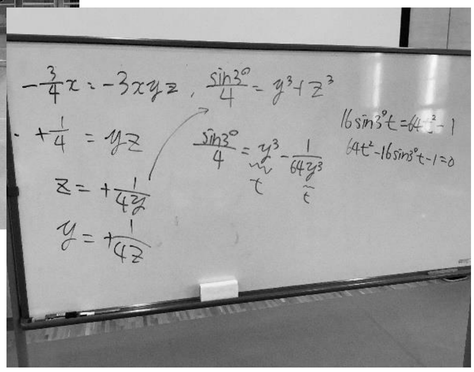
$\Leftrightarrow \sin 3^\circ = 3\sin 1^\circ - 4\sin^3 1^\circ$

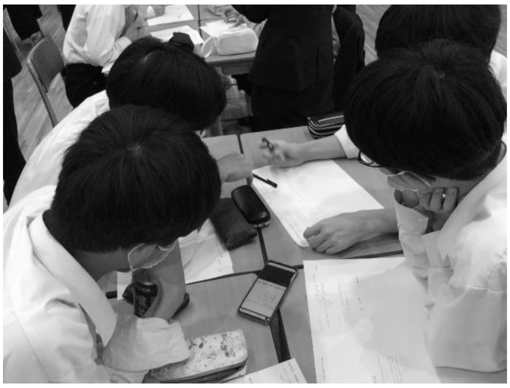
$-4\sin^3 1^\circ + 3\sin 1^\circ - \sin 3^\circ = 0$

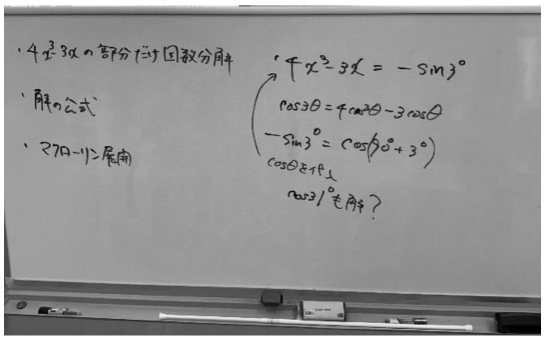
ループしちゃう …

その他の解法









６．解説スライド（一部抜粋）

目標② sin 1°を求めよう！

3倍角の公式より

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\sin 3° = 3\sin 1° - 4\sin^3 1°$

$x = \sin 1°, a = \sin 3°$ とおくと

$4x^3 - 3x + a = 0$

3次方程式 $4x^3 - 3x + a = 0$ を解こう！

$4x^3 - 3x + a = 0$

$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{a}{4} = 0$

この解の1つが sin 1° である。

$-\frac{3}{4} = -3yz, \frac{a}{4} = y^3 + z^3$ とおく。

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 0$

$$\begin{cases} x+y+z=0 & \cdots ① \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①より　$x = -y - z$

②より

$x^2 + (-y-z)x + y^2 + z^2 - yz = 0$

これを解くと

$$x = \frac{y+z \pm \sqrt{3}i(y-z)}{2}$$

また，$-\frac{3}{4} = -3yz, \frac{a}{4} = y^3 + z^3$ より

左の式より $z = \frac{1}{4y}$

これを右の式に代入

$64y^6 - 16ay^3 + 1 = 0$

$t = y^3$ とすると

$64t^2 - 16at + 1 = 0$

$64t^2 - 16at + 1 = 0$

$t = \frac{\sin 3° \pm i\cos 3°}{8}$

$t = y^3$ より

$y = \frac{\sqrt[3]{\sin 3° \pm i\cos 3°}}{2}$

y と z の条件式が対称式なので z も同様。

(y, z)

$= \left(\frac{\sqrt[3]{\sin 3° \pm i\cos 3°}}{2}, \frac{\sqrt[3]{\sin 3° \mp i\cos 3°}}{2}\right)$

(複号同順)

これを

$x = -y - z, \frac{y+z \pm \sqrt{3}i(y-z)}{2}$ に代入すると

$x = \frac{-\sqrt[3]{\sin 3° + i\cos 3°} - \sqrt[3]{\sin 3° - i\cos 3°}}{2}$

$x = \frac{\sqrt[3]{\sin 3° + i\cos 3°} - \cdots(3\text{乗根だらけの式})}{4}$

の3つの解が求まる。

どれがsin 1° ？

<別解>

3次方程式 $4x^3 - 3x + a = 0$ を解こう！

$4x^3 - 3x + a = 0$

$x = s + t$ とおく …

インターネットなどで調べずにこの解法に取り組んでいた班が１つだけあった。なぜ思いついたかを聞くと、

「３次方程式を解きたいが知っている形が

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$

しか思いつかなかったので、無理やりこの形になるように変形しようと思った」

と言っており、とても感心した。

７．生徒のアンケート結果（母集団は学年４クラス全体）

（１）授業前にテーマ「３次方程式を用いて三角比の表をつくる」を伝えたときの印象
楽しそう・面白そう　　　……………………………………75.0％
楽しくなさそう・面白くなさそう・特に何も思わない…25.0％

（２）授業後の印象
楽しかった・面白かった　　　……………………………………87.1％
（内訳：グループワーク…60.4％、数学的内容…45.8％、総合的に楽しかった…41.7％（複数回答可））
楽しくなかった・面白くなかった・特に何も思わなかった…12.9％

（３）今後もこのような（教科書とは一風変わった）授業を受けたいか
受けたい　　…………………………66.7％
受けたくない・どちらでもよい…33.3％

（４）自由記述欄より（生徒の記述をそのまま記載）
・普段触れているけど深入りはしないことを探求できて、面白かったです。

・知っている知識や考え方を組み合わせることで、教科書にのっている以上のことを考えられることが、数学の広がりを感じられて楽しいです。公式や考え方から、他のことに当てはめて考えることができることが、数学の素晴らしい点の一つだと思います。またこれは言い過ぎかもしれませんが、教科書で学んだりテストしたりするとき、数学は生徒にとって「目的」であるのに対して、探求授業ではその習ったことが「手段」として使える（公式や習った考え方を使って、答えを導くという点で）ように感じました。

・求めるものは単純で理論的には求められるはずなのに計算の複雑さや思っていた通りにいかないことが少し不思議に思った。

・数学の力がもっと付いているであろう何年後かにもう一度やってみてどこまで時進めることが出来るか対比してみたいと思った。

・難しかったが、新しい発想を目指すことは面白かった。

・教科書に載っている資料をいつもは受動的な姿勢で見ているだけなので、今回どのようにしたら三角比の表を自分たちの力で作ることができるのかと考えるのはとても楽しかった。

・初見の問題に対して今までの知識や経験を利用して取り組む能力は、大学入試で必要とされている。さらに、入試だけでなく、日常問題にも活かせる能力なので、今回の授業でその能力が鍛えらえてとても良かった。私は数学が好きで得意な方なので、班のメンバーの手助けができて嬉しかった。

・sin3°までは意外と楽に出せることがわかり驚いた。sin1°を初めて求めようと思ったので楽しかったです。

・三角比の計算をするのは面白くなかったけど、解き方をみんなで考えて行くのが、その発想があるのか！となって面白かった。

・難しかったけど自分で考える授業だったので授業に参加したという気持ちをもてた。

・最後の解法がまだ理解出来ていなくてモヤモヤが残っている。

・計算が大変だったことが１番印象的でした。

・数学のエグみを凝縮したような授業で僕は苦手でした。

・sin1°を求めたとしてそこから全部の角度求めるのはほとんど無理だろうなと思った。

８．授業を終えて

＜生徒の反応＞

生徒の活動を見ていると、“班のメンバー各々が自分の思いついた方法で思い思いにとりかかり、後ほど各々の考えを発表しどの方法がよいかを議論する”“最初に班で最もよさそうな方法を１つに絞るための議論を行い、１つに決まれば一斉に同じ方法で取り組むまたは作業を分担して取り組む”など様々だったが、どの班においてもしっかり議論・試行錯誤できていた。ある班は、「３次方程式の解の公式」「カルダノ公式」など、インターネットからヒントを得て、まず公式そのものの解読作業から始めていた。解読にはとても時間がかかるのでタイムオーバーとなっている班もあった。しかし、その場合も班全員で粘り強く試行錯誤できていたので本時の目標は達成できたと判断している。また、ある班は、大学数学で習うような解法（マクローリン展開など）に挑戦していた。どこでそのような方法を知ったのかと聞くと、教育実習生が授業内で話していた余談でその言葉を知り、今回それを活用できるのではないか思いインターネットで調べてみると本当に活用できそうだったから、とのことだった。生徒は普段から人の話をよく「聴く」ことができていると改めて感じた。

＜グループワークについて＞

グループワークを取り入れることで一人では諦めてしまいそうなことに粘り強く取り組むことができたり、クラスメイトから新たな発想を得ることができたり、自分では理解していても班のメンバーにうまく伝えられないもどかしさを感じることができたり、プラスの面がたくさんあったので今後も行っていこうと思った。しかし、話が進まずに個人ワークになっていた班も１～２班あったので、他の班と合体する・各々が他の班へ視察するなどこちらとしても工夫が必要だと感じた。

＜総合して＞

授業テーマ「３次方程式を用いて三角比の表をつくる」を設定した際は、「３次方程式を解く」ことが難解なため、生徒の手が動かない・グループワークとして成り立たない、などの懸念があった。しかし、こちらが予想していたよりも様々な解法が生徒から出てきたことにとても驚いた。今回の授業実践は計３コマだったが、第２限の途中で調べてもよいと伝えたこともあり、まったくの手付かずというような班はなく、班でしっかり議論・試行錯誤し、とりあえず何かしらに取り組む姿がとても印象的だった。普段の授業でもペアワーク・グループワークを行っているが、普段より議論が活発になっていたように感じた。その要因は、今回の問いの答えを知っている生徒がほとんどいなかったことが考えられる。教科書には記載されていないような、生徒たちが考えたこともないようなテーマを設定することにより、数学の好き嫌い・得意不得意にかかわらず一人一人が、がむしゃらにかつ積極的に取り組めたことで、グループワークもより活発になったと考えている。このことから、今回の目標「生徒たちが昨年度から抱いている疑問について、クラス全体・学年全体で試行錯誤する。その際、疑問を解決することを目標とするのではなく、主体的に数学的活動を行うことを目標とする。また、それと同時に既習事項をたくさん活用しながら粘り強く考察する力を養う。」については、どのクラスにおいても達成できたと考えている。また、今回のテーマは実際に授業中に出た生徒の疑問から設定したので、今後も生徒が抱く素朴な疑問を全体に共有したり、それについて全体で考える機会をつくりたい。

９．引用文献

『数学Ⅱ Advanced（2019)』東京書籍