グラフ理論を題材にした“数学的な見方・考え方を楽しむ”授業

－文房具としての ICT 活用を目指して－

とりかい　たかまさ
鳥飼　隆正

抄録：本研究の目的は，現在，高等学校での限定的な紹介にとどまっている離散グラフ（グラフ理論）を中学校の授業で扱い，数学的活動を通して新たな見方・考え方を楽しむ教材を開発することである。ハミルトンの世界一周ゲーム（Icocian Game）とケーニヒスベルクの橋渡り問題（Königsberg Bridge Problem）という２つの古典的題材を出発点とし，離散グラフの導入はもちろん，数学的な見方・考え方を働かせることの有用性にも迫る授業ができたと考える。

また，昨今の激動する学校環境において声高に叫ばれている ICT 活用という視点から，生徒の幾何学習における ICT 活用実態を調査し，授業における ICT 機器の効果的な使用方法を模索した。そして，使用すること自体が目的にならないような効果的な活用場面の設定と，思考を活性化させる文房具として ICT 機器を必然的に活用する授業展開を試みた。本研究の成果は，令和２年度の第67回教育研究会においてオンラインで発表を行うとともに，大阪府公立中学校数学教育研究会にて報告した。本稿は，その実践の記録である。

キーワード：数学教育，ICT 機器の活用，グラフ理論，ハミルトン路，オイラーの多面体定理

Ⅰ．グラフ理論について

（１）中学生の「グラフ」に対する認識

一般に「グラフ」と言えば，中学生はどのようなグラフを想起するだろう。本校の中学生に授業前に確認したところ，棒グラフや円グラフ，折れ線グラフのようないわゆる統計処理で使用する「グラフ」か，或いは，与えられた関数に対して，点とその点における関数値をユークリッド平面（空間）内にプロットした「グラフ」を挙げる生徒ばかりであった。小学校，中学校では質的データから，量的データ，さらには時系列データなどを順に学習していくため（**表１**），中学生段階での「グラフ」の認識が前述のようになるのも，至極当然である。

表１　「グラフ」の学習履歴

履修学年	「グラフ」に関する学習
小学校２年	簡単なグラフ （○などを並べて数の大きさを表したグラフ）
〃　３年	棒グラフ
〃　４年	折れ線グラフ
〃　５年	円グラフ，帯グラフ
〃　６年	柱状グラフ，比例のグラフ
中学校１年	$y=ax$，$y=a/x$ のグラフ
〃　２年	$y=ax+b$ のグラフ
〃　３年	$y=ax^2$ のグラフ

一方で，本研究で扱う“グラフ”は，有限個の頂点（Vertex）の集合と，それらの点を結ぶ辺（Edge）によって与えられる数学的構造の呼称である。単に“グラフ”と呼ぶことが一般的であるが，他の「グラフ」と区別するために，離散グラフと呼ぶことも多い。この離散グラフに関する研究分野をグラフ理論と呼び，統計や関数のグラフとは一線を画す数学の研究分野である。辺の長さや形状は無視して，どの頂点とどの頂点が結ばれているのか否かに着目することで得られる数学的な構造は，ユークリッド幾何とは異なる関係性や構造を表現した数学モデルと言える。点と線のみの非常にシンプルな世界であるが，その実，現代社会に非常に多くの示唆を与える実践的な数学である。私たちの生活との関連という点において，通信ネットワーク，計算機科学，分子構造図，電気回路図，進化系統樹，鉄道路線図，道路網，会社組織図，人物相関図，最適化問題，マッチングなど，離散グラフが利用される分野は多岐に亘る。

グラフ理論は私たちの生活と密接に結びつく概念でありながら，これまでの教科書に登場してきた「グラフ」とは大いに趣を異にする。そのため，離散グラフを数学的に認識している中学生はごく僅かである。日常に溢れながらも数学と認識されていないグラフ理論を学習することが，社会を数学的に観察する新たな視

座の獲得につながることが期待される。また，生活と数学の強固な結びつきを実感することが数学を学び続ける強い動機にもなり得ると考え，本研究をスタートした。

（２）授業で扱う３つのグラフ理論の話題

本研究で提案する授業では，３つのグラフ理論の話題を取り扱うこととした。

まず，ハミルトンの世界一周ゲーム（Icosian Game）と呼ばれる経路探索問題である。この課題学習全体の導入として，課題を数学的に焦点化する過程からグラフ理論の着想を得ることを試みた。グラフ理論という新たな発想を一方的に教示するのではなく，そのような見方・考え方が生まれる必然的な状況を授業内に生み出すことに砕心した。

次に，中学１年生の空間図形で扱う「オイラーの多面体定理」を，グラフ理論によって証明することを試みた。中学校では発展的課題として，（面の数）＋（頂点の数）－（辺の数）＝２であることを紹介するが，これを厳密に証明することで，中学校の幾何学習における論証の納得性を担保することを目指した。

最後に，課題学習の終盤においてケーニヒスベルクの橋を題材とした。古典的かつ非常に有名な数学の話題を紹介しながら，概念の抽象化や情報の捨象などの数学的手法を体得する授業展開を目指した。

３つの題材を中学校で意図的に扱い，生徒にグラフ理論を通して数学の持つ力や可能性を示すことが主眼である。グラフ理論を介して日常生活や社会の事象と数学の世界を自由に往来する過程を，生徒とともにじっくり味わうことのできる全４時間の課題学習を計画した。

Ⅱ．カリキュラムについて

（１）微積分へと続く数学教育

学校における数学教育では，長きに亘り微積分をその到達点とするカリキュラムが履行されている。中学校，高等学校と学年が上がるにつれ，高度に積み上げられていく数学の美しさに魅了される生徒もいれば，峻険な数学に思わず竦んでしまう生徒もいるだろう。数学教育のいわば本流が微積分へ近づくほどに，私たちは抽象度の高い学問の世界へと誘われてしまう（**図１**）。「楽しかった算数」がいつしか「難しい数学」へと変化していくことを経験すると，高度な数学が人生の何の役に立つのか，見通せなくなることも往々にある。

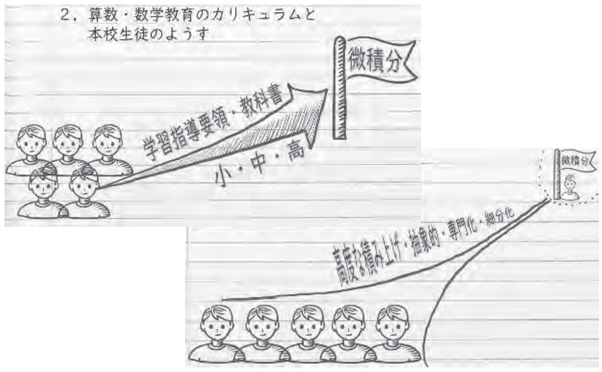


図１　研究協議スライド（2021.2.6）より

（２）高等学校「数学活用」の新設と廃止

そのような懸念を払拭するねらいもあり，高等学校に2003年，生涯にわたる数学教育の基礎を培うことを目的とした科目「数学基礎」が新設された。さらには，2012年の高等学校学習指導要領の改訂で，「数学基礎」はその趣旨を生かし，内容をさらに発展させ，数学的活動をより重視した科目である「数学活用」に置き換わった。身のまわりで活用される数学を重点的に扱ったこの科目では，私たちの生活に密接に結びつく数学の話題が数多く紹介され，数学的活動や教科横断的な視点から多くの話題が提供された。しかし，実態として「数学活用」を開設した学校は普通科・専門学科では数%にとどまり，総合学科でも僅か２割程度であった（**表２**）。このような状況もあり，現行（2018施行）の学習指導要領改訂で「数学活用」

表２　科目の開設状況

（単位％）

	普通科				専門学科				総合学科
	１年次	２年次	３年次	単位制	１年次	２年次	３年次	単位制	
数学Ⅰ	96.4	2.4	4.8	5.6	97.0	14.8	2.6	1.6	100.0
数学Ⅱ	23.2	92.6	40.8	5.6	3.1	65.1	50.0	1.3	96.4
数学Ⅲ	0.0	21.3	82.0	5.6	0.1	2.1	17.3	0.7	75.2
数学A	83.7	12.9	10.4	5.5	12.0	39.9	35.1	1.5	98.7
数学B	0.3	81.6	37.4	5.7	0.2	16.1	26.3	1.4	88.4
数学活用	0.0	1.2	6.0	0.9	0.0	1.0	5.2	0.0	20.8

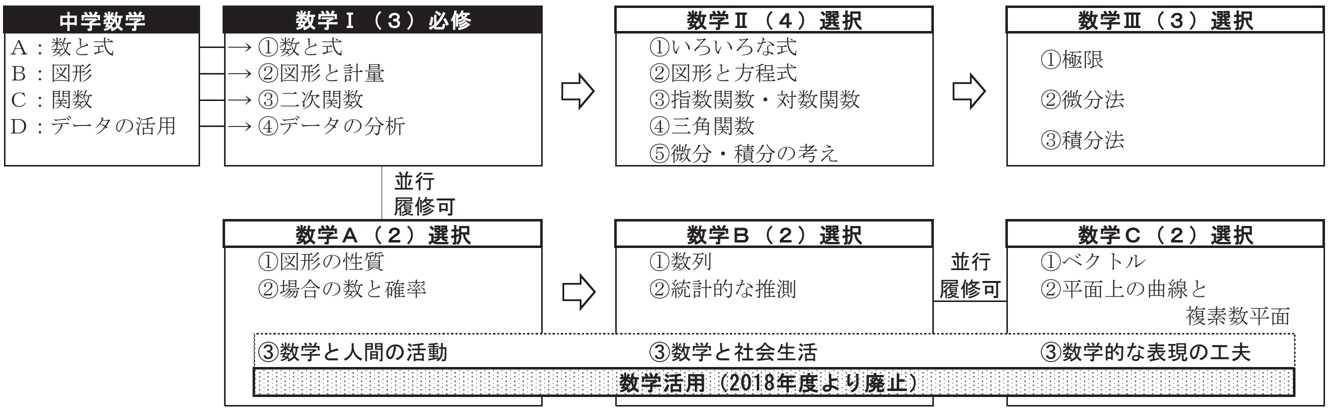
（H28.3.7 文部科学省公表資料「平成27年度公立小・中学校及び高等学校における教育課程の編成・実施状況調査の結果について」より作成）

は廃止され,扱われていた内容は「数学Ａ」「数学Ｂ」「数学Ｃ」の３科目へと分割移行されることとなった（**表３**）。ここ数十年にわたり，「数学と社会生活の結びつき」を実感しやすいテーマや教材が学習指導要領の改訂の度に科目を転々としている現実は，生徒の発達段階と学習する時期の不整合や，大学入試で求められてきた数学の力とのギャップが影響してきたと考えられる。

また，学習指導要領には，履修上の注意事項として「数学Ａ」「数学Ｂ」「数学Ｃ」のいずれも，構成される３つの内容から適宜選択するように明記されている。これにより，多くの学生にとって数学と社会生活の結びつきを感じる機会はますます減少することになる。事実，本研究で扱う離散グラフは，数学Ｃにおける「３．数学的な表現の工夫」で取り扱う内容である。理系に進んだごく一部の高校３年生のみが履修する科目の，さらには選択履修内容となっていることは，甚だ残念なことである。

表３　現行の学習指導要領における中学校と高等学校の学習内容

（数）は単位数



（３）中学校授業でグラフ理論を扱う意義

数学教育が進むほどに，数学と実生活がかけ離れていく印象を抱かせている嫌いがある。しかし，数学教育の陶冶的意義として，将来の学習や生活に数学を積極的に活用できるようになることや，知的好奇心，豊かな感性，想像力，直観力，洞察力，論理的な思考力，批判的な思考力，粘り強く考え抜く力などの創造性の養うことも重要な課題である。

したがって，授業者は学習が進むほどに生徒が数学の有用性を感じられるよう工夫し，或いは，数学を学習する意味を見出せるように常に意識し，弛まぬ授業改善を継続せねばならない。受験テクニックの刷り込みや解法スキルの伝達に終始しているようでは，数学嫌いや数学離れが加速するのは当然である。

そのような背景にあって，グラフ理論は誰しも経験のある一筆書きのようなパズルを出発点とする親しみやすい分野である。また，複雑な計算処理や難解な公式などに依存しないため，既習事項の習熟の影響を受けにくい分野でもある。中学校の授業でグラフ理論を扱うことは，生徒は表層の面白さを導入としながら数学的な見方・考え方を働かせる楽しさを純粋に味わうことができる。また，数学的な発想の幅を拡げたり論理構造を学んだりする経験を得ることが可能である。したがって，義務教育である中学校の数学でグラフ理論に触れる機会を創出することは,極めて意義深いことであると考えた。多くの生徒が履修しない「数学Ｃ」の履修を悠長に待っていると，機を逸してしまう。

Ⅲ．ICT 機器の利用について

（１）GIGA スクール構想と，１人１台端末

令和２年度は，世界的な感染症拡大による一斉の休校措置があり，GIGA スクール構想の実現前倒しによって，学校現場では急速に ICT 環境の整備が進んだ。そして，学習指導要領では言語能力，問題発見・解決能力とともに情報活用能力が学習の基盤となる資質・能力として位置付けられた。鉛筆やノートと同様に個人端末がマストアイテムとなる中で，１人に１台ずつ与えられる可動式ＰＣ端末は，その利用方法が注目されている。本校でも，令和３年度までに１人１台端末とそれに付随する通信環境が整備された。あとは，教員，生徒ともに「使いこなすだけ」の段階に入っている。

ICT を活用しながら授業設計を進める際には，Ruben R.Puentedura が提唱した SAMR モデル（**図２**）が示唆を与えてくれる。ICT 活用が叫ばれながらも，その必然性や活用場面，使用方法に疑問を抱いたときには，是非とも立ち戻りたい有効な指針である。

SAMR モデルで示された４つの段階を，簡単に紹介する。

活用の第１段階「Substitution（代替)」は，グラフを拡大して黒板に板書する代わりに ICT 機器を利用するような場面である。もちろん，一斉学習における教材提示だけも ICT 機器の有効活用ではあるが，教具を変更するだけでは従来の授業と機能的に大差はない。もし学習効果が同等なのであれば，プロジェクタやＰＣを準備するよりグラフ黒板を教室に運ぶ方が容易であると感じる授業者も，まだまだ多いかもしれない。

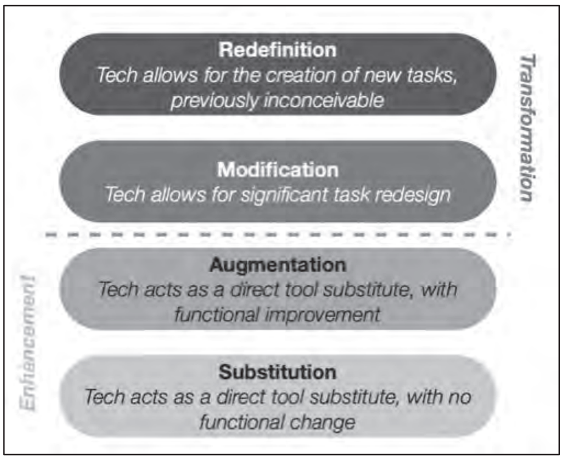


図２　SAMR Model

第２段階「Augmentation（拡張)」は，生徒が画面上でグラフを自在に動かす，複数のグラフの傾きを比較する，点と点のつながりを微視的に考察する，といった ICT 機器の可視化機能や即時性が学習に活用されている段階である。ICT 機器が紙の教科書や板書の限界を補完していることを実感しやすい活用場面ではあるが，第２段階までの利用であれば１人１台を占有している必然性はなく，これまでの共有端末の環境でも期待できる効果であることに注意しなければならない。つまり，１人１台端末の環境を生かすためには，第３段階「Modification（変形)」や第４段階「Redefinition（再定義)」に踏み込んだ課題を設定することが肝要である。

中川（2020）はこの第２から第３段階へのステージアップを「段階 2.5 の壁」と称し，ICT 機器を活用して授業を強化することから学習者を変容させることの重要性と難しさを指摘している。端末を介して生徒が意見を交換したり，つながりの中で学びが深まっていったりする端末「共有」の良さを保ちつつ，さらに端末「占有」の意義を生かした学習形態と授業展開を考える視点が，１人１台端末の時代には不可欠である。

しかし，１人１台端末の効能として学習の個別最適化が謳われている一方で，使用場面や方法を誤ると，生徒の分断や孤立を助長する危険も孕んでいる。１人１台端末を反復トレーニングや知識の刷り込みに有効に利用するだけでは，新たな学習の拡がりや視点の獲得には至らない。端末にただ向き合うだけでは思考を練り上げるプロセスが欠けてしまう懸念に留意すれば，授業の内外に端末をどのように組み込むか，授業者の授業構成力や機器に向き合う姿勢がより一層問われている局面であるといえる。

（２）ICT 活用の分類からみた授業設計

本授業では，前項で触れた１人１台端末によって危惧される学習者の孤立を意図的に避け，生徒同士の協働的な学びを保障する観点から授業を構成することに主眼を置いた。学習場面に応じた ICT 活用の分類例（**図３**）に基づき，ICT 機器が得意とする可視性や即時性，再現性などを効果的に利用した授業展開を心掛けた。

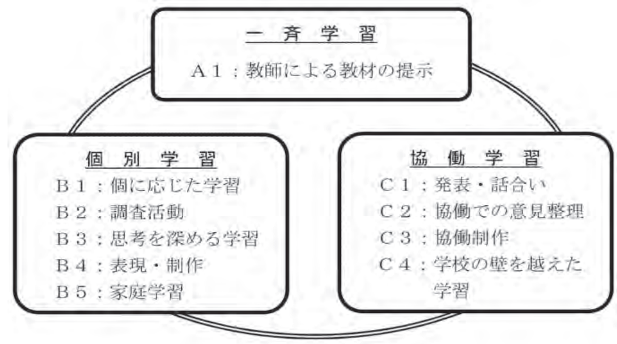


図３　学習場面に応じた ICT 活用の分類例
（文部省委託事業「学びのイノベーション事業」より作成）

① 一斉学習における ICT 活用（Ａ１）

まず，ICT 活用の最も基本的な例示に活用した（**図４**）。授業展開の最も効果的な場面で例示することができること，投影する場所を工夫すれば板書エリアとの構造化を図ることができるなど，初歩的でありながら現在の授業にはなくてはならない使用法である。

また，動きを伴う教材の例示にも ICT 機器の活用は欠かせない。今回は，見取図で表現された正多面体を離散グラフへ書き換える際に，動的幾何ソフト Geometric Constructor（以降，GC とする）を使用して，例示した。グラフ理論の書籍の多くでは，この操作を「面がいくらでも伸びる薄いゴム膜で覆われている正多

図４　Ａ１：教師による教材の提示

面体を用意して，その正多面体の頂点を一つずつ外側に押し広げていくと…」といった解説が展開される。これを口頭で説明しても，なかなか実感を伴って伝えるのは難しく，また実際にゴム膜で覆われている正多面体を製作するのも骨の折れる作業である。これらの念頭操作を視覚的にサポートし，場合によっては可逆的に再現しながら理解を深められるのは，ICT 活用の大きな長所であると考える。また，ワイヤレス投影することで，教室内のあらゆる生徒から教材の視認性を高めるような工夫を施した（**図５**）。これにより，生徒は自席から投影された教材を自由に操作しながら発表することも可能になった（今回は Windows Surface ／ Microsoft Display Adaptor を使用した）。

図５　Ａ１：教師による教材の提示（ワイヤレス投影）

② 協働学習における ICT 活用（Ｃ１，Ｃ２，Ｃ３）

図６　Ｃ２：協働での意見整理

協働学習の場面では，動的な数学ソフトウェア GeoGebra と先ほどの動的幾何ソフト（GC）を使用した。どちらのソフトウェアも web 上で無料公開されており，端末を選ばずに使用できる教育向けの優秀なソフトである。今回は，予め公開されている正多面体（GeoGebra）と，今回の授業のために自作した教材（GC）を生徒に与えた。しかし，どちらのソフトにも直感的に操作可能なユーザーインターフェースが用意されており，中学生であっても何度か使用すればすぐに自由な作図が可能であるのも魅力的である。１人１台の端末をあえて与えないことで，１つの教材を複数の視点で見たり，会話の中から新たな思考が生まれたりするような環境を授業内に生み出すことを意図した（**図６**）。

③ 個別学習における ICT 活用（Ｂ２，Ｂ４）

授業のまとめとして，身のまわりで活用されている離散グラフを探す，といったレポート課題を設定した。学校での授業と家庭での学びが連続的かつ補完し得る題材となるように留意したつもりである。また，発見した離散グラフに数学的な解釈を加えるところまでの表現・制作の課題として与えたので，レポート作成以前に調査活動も必須となる。学校周辺の鉄道路線図を例示した上で，Google Classroom を活用してレポートの雛型を PDF で配信し，生徒全員が自宅学習として取り組んだ。**図７**は，生徒の作品の一例である。

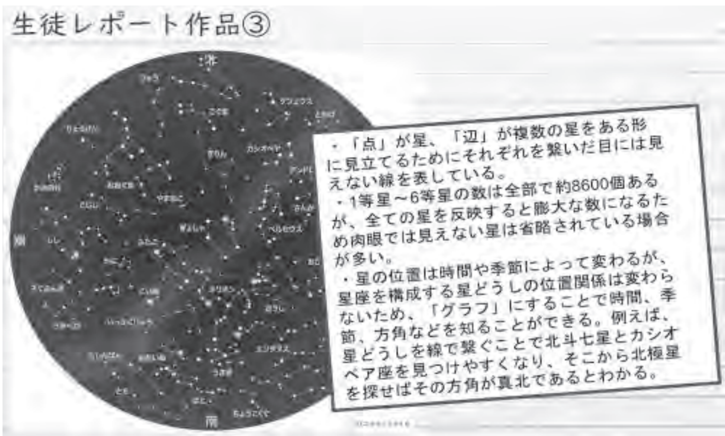


図７　Ｂ２：表現・制作（生徒レポートより）

上記①～③を授業に組み込むことで，活動場所（学校と家庭），或いは活動形態（一斉と協働，個別）の構造化を図り，活用のねらいを絞って ICT 活用の課題を準備した。発展を続ける学校 ICT 環境においても，あくまで授業者がその手綱を握りしめた上で，補助的な学習具として積極的に活用するよう心掛けた。

Ⅳ．生徒の実態について（アンケート調査の結果と分析）

数学的活動を盛り込み，ICT を活用したグラフ理論の授業を設計するにあたり，事前に本校の中学生約 400 名に対してアンケート調査を実施した。

数学（幾何学習）に対する実態調査
調査方法：Google Form を利用した全数調査
調査対象：大阪教育大学附属天王寺中学校の生徒 393 名
内　　訳：72 期生（中３：119 名），73 期生（中３：132 名），74 期生（中２：142 名）

（１）教科としての「数学」「幾何」に対する生徒の意識

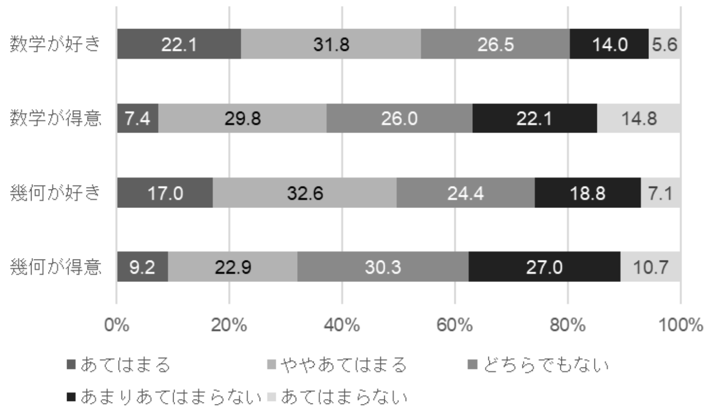


図８　本校の生徒の数学および幾何の学習に対する意識

図８から分かる通り，数学を好きだと肯定的に捉えている本校の生徒の割合は，５割を超えている。ただし，幾何への意識に関する質問では，数学全体よりややポイントを落とす結果となった。授業を行う上でも，幾何に関する得手不得手を自覚している生徒は一定数存在する。

ところで，国際数学・理科教育動向調査（TIMSS2019）の質問紙調査において「数学が楽しい」と回答した中学生の割合は，日本平均が 56%，国際平均が 70%である。また，「数学が得意だ」と回答した中学生の割合は，日本平均が 40%，国際平均が 47%であった。本校の生徒の数学に対するアンケート調査の結果は，国内の平均との大差はないものの，国際平均と比較すると大きく下回っているのが現状である。

また，TIMSS2019 では，「数学を勉強すると、日常生活に役立つ」「数学を使うことが含まれる職業につきたい」と答えた日本の中学生の割合は，国際平均を下回った。数学と実社会との関連に対して肯定的に捉える割合も経年で改善傾向にあるが，諸外国と比較すれば依然として学習意欲面に課題があるとされた。小学校と中学校の間で算数・数学の勉強に対する意識の差が顕著であり，小学校から中学校への移行も数学教育の大きな壁になっていることが指摘されている。したがって，小・中・高を通して社会生活を営む上で必要な数学的資質・能力を育むこと，及び，積極的に数学に関わる態度を身に付けることが極めて重要である。

（２）図形を考察する際に用いる方法

次に，図形を考察する際の方法を調査し，生徒の実態の把握を試みた。まず，複数回答可で「図形を考察する際に使用する方法」を調査した（**図９**）ところ，多くの生徒が図をかいて紙面上で考えるか，もしくは念頭操作に頼って考察している様子が窺える。

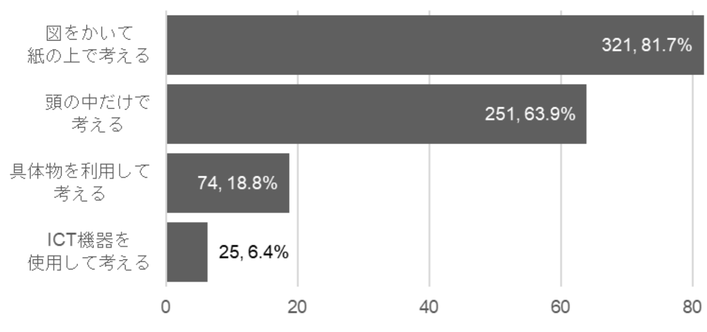


図９　図形を考察する際に，よく利用する方法

また，「図形を考察する際に最も使用したい方法」（**図 10**）においては，８割近くの生徒は，図をかくか，念頭操作を選択する実態が明らかになった。立体の構造を捉える手法を自由に選択できる際に，自らの思考に「テスト中に使える方法かどうか」というフィルターを無意識にかけている生徒が多い実態が浮かび上がり，念頭や紙面上での操作が唯一の方法であるかのような錯覚を抱いている回答も散見された。また,同じ理由で,具体物やコンピュータを使用しないという判断に至る回答もあった。いずれの場合も，ペーパーテストを唯一の学習動機と誤認しているうちは画一的な思考に陥り，解答パターンの暗記が目的になりがちである。こ

の調査結果を踏まえ，柔軟な発想であらゆる手法を勘案し，試行錯誤の末に新しい着眼点を獲得するといった数学的体験をこれまで以上に重視すべきであることを再認した。大学入試改革も行われているが，生徒が持つ負の学習経験を打破する日々の授業や評価の在り方を考えることが急務であることを，改めて痛感した。

なお，ICT 機器の利用に関しては，よく利用すると回答した生徒より，今後利用したいと考えている生徒が微増している。これには，「コンピュータを利用する学習機会が増えてきたから」「今までやったことがないので挑戦してみたい」「紙に書くよりコンピュータの方が正確に書くことができるから」「いろいろな方向から図形を観察することができそうだから」といった意見があった。時節柄，ICT 機器を使うことが善だ，という発想で世間を捉えている生徒もいたが，授業者と同様に，生徒も ICT 機器を積極的に活用していくべきだという前向きな回答が見られたのは興味深い。

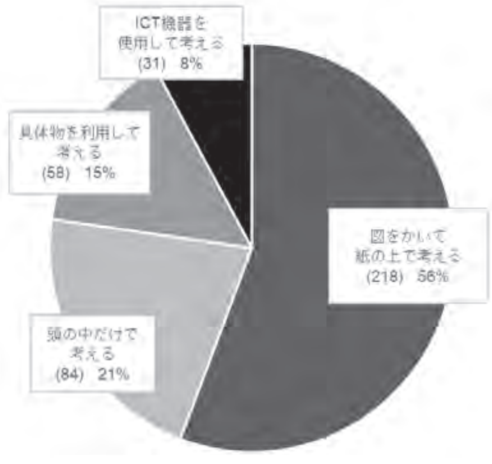


**図 10　図形を考察する際に
最も利用したい方法**

（3）幾何学習の嗜好と，図形の考察方法と相関について

幾何学習が好きであるかとの質問に肯定的な回答をした生徒ほど，複数の方法を用いて図形を考察していると回答した割合が高い結果となった（**表４**）。２つのカテゴリーデータの相関関係を解析するクラメール関連係数は 0.164 であったので，幾何に対する嗜好と図形考察における選択肢には，弱い関連があると考えられる。

表４　「幾何学習が好きか」と「図形を考察するときに使用する方法の種類」

	回答人数（人）					回答割合（%）				
	1 種類	2 種類	3 種類	4 種類	横計	1 種類	2 種類	3 種類	4 種類	横計
肯定的回答	64	116	14	1	195	32.8	59.5	7.2	0.5	100
どちらでもない	40	49	7	0	96	41.7	51.0	7.3	0.0	100
否定的回答	44	49	8	0	102	43.1	48.0	7.8	1.0	100

Ⅴ．授業の実際

〈第１次〉…２時間扱い

正十二面体のすべての頂点を通る経路を探し，それを説明する活動を通して，数学的な見方・考え方を働かせ，離散数学の視点を獲得することを目標とした。

《課題１》ある都市を出発して，すべての都市を通って元の都市に戻るコースを見つけよう。

授業の導入では，「世界一周旅行にいこう」と題し，世界 20 地点を巡って出発地に戻る経路を考えさせた。この時点では，現実社会の課題であるため，生徒は地球儀を用いながら球面上で思案する。生徒から「地点のみの位置関係が把握しやすければもっと考えやすいのではないか」という発言が飛び出したタイミングで，課題解決に必要な情報が何かを学級全体で整理し，都市の地点とその位置関係のみが明らかになるように，多面体をモデルとすることを共有した。ここでは，球に近い正多面体として正二十面体を想起する生徒が大多数であったが，正二十

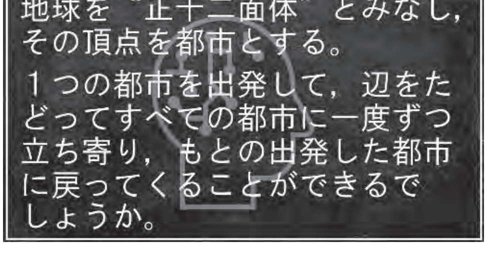


図 11　授業スライドより（１）

面体でモデリングすると 12 都市（12 頂点）しか訪問できないため，現実の世界一周旅行のイメージからやや遠ざかってしまう。また，授業のねらいから，見取図や展開図をかく難度の高い立体を課題に設定する必然があった。また，ここでは示さないものの「ハミルトンの世界一周ゲーム」の追体験にもつなげるため，これ以降は 20 頂点を持つ正十二面体をモデルに再検討することを全員と確認し，改めて世界一周経路の探索に戻った（**図 12**）。ここで，旅行者は都市（頂点）から都市へ，辺を通ってのみ進むことが許される，という条件が付加されたことになる。

図 12　地球と正十二面体

《課題２》正十二面体のすべての頂点を１回ずつ通り，元の頂点に戻るコースを見つけよう。

現実課題が数学化されたところで，まずは具体物を使用せずに課題に挑戦させた。正十二面体の念頭操作が非常に困難であることを,実感を伴って確認された。「知っている」ことと「立体構造を的確に認識している」ことの違いを痛感し，生徒は思考を深める上で，手を動かして考えることの重要性や必要性を再認識したようだった（**図 13**）。

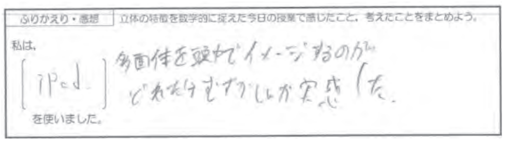


図 13　生徒の振り返りレポートより

その後，紙と筆記用具だけを使うことを指示すると，皆が一斉にペンを走らせた。しかし，ここでは正十二面体を紙面に表現することに苦戦する生徒が多かった。正多面体を学習する中学１年生から時間が経過していることもあり，正確な見取図をかくことのできる生徒は学級で３名程度であり，展開図をかくことができた生徒も少なかった。一方で，展開図の面を意図的に変形し，頂点を辿る経路を模索している生徒もいた（**図 14**）。これは，完全ではないものの離散グラフの着想の一旦であり，目的に応じて柔軟に思考できる生徒の存在を頼もしく感じた。

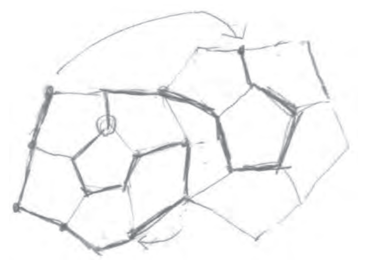


図 14　生徒のワークシート（１）

さらに，紙面上での思考に行き詰ったところで具体物を与え，ここまでの念頭操作と具体的操作をつなぐ時間を確保した。但し，ＡとＢの２種のペアを作り，ペアＡにはポリドロン立体模型の正十二面体を与えた。また,ペアＢには iPad を与え,GeoGebra 上の正十二面体を操作させた。異なる具体物を与えることで,学習ツールとしての両者の有効性と違いを体感させるのが,その狙いである。

経路を見つける過程において，生徒はこれまでの数学的経験に基づきながら「これって一筆書きではないか」「通らない辺があっていいので，一筆書きとは違うのでは」とのやり取りが生まれた。ここでは，すべての辺を一度だけ通って元の頂点に戻る経路（一筆書き，オイラー閉路）とすべての頂点を１度だけ通り元の頂点に戻る経路（ハミルトン閉路）の相違を整理した。この後，生徒の多くは，具体物を手元で操作しながらであれば，容易にハミルトン閉路を発見することができた。

《課題３》見つけたコースを，相手にうまく伝えよう。

次に，前課題で見つけたハミルトン閉路を他者に伝えるには，どのような方法があるかを考えた。ペアＡ・Ｂ間で互いに自分たちの見つけた経路を相手のペアに伝えるために，通過順を記した付箋を立体に貼り付けながら説明を加えたり（**図 15**），iPad 画面上を辿りながら，経路を示す様子がみられた。画面（GeoGebra）に書き込むことが難しいと判断した班では，正十二面体を適当に配置した上でスクリーンショットを撮影し,ペン書きできるアプリから経路を書き込むなどの工夫を行っていた。程度の差こそあるものの，文房具として活用するスキルを持つ生徒も決して少なくないのが現状のようであった。

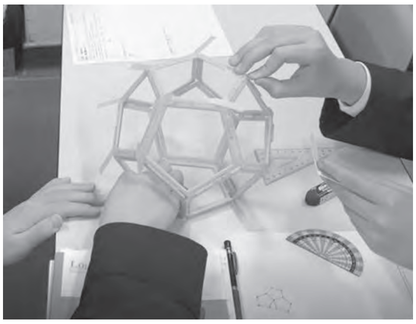


**図 15　ポリドロンに付箋を
貼っていく班**

《課題４》発見したコースが同じであるかどうか，比較しよう。

続いて，２つのペアがそれぞれ見つけた経路が同じであるかどうかを判定させた。比較対象が立体模型と画面上（GeoGebra）では比較するのが困難であるため，互いに発見した経路を同じ方法で記述する方法を考えさせた。ここでは鏡像は１つと考えることに注意させた。

この過程では，立体の表現方法に関する知識を再構築する場面が生まれた。見取図は目に映る立体の様子がそのままかかれている良さがある。一方で，構造が複雑な立体は見取図をかくことが困難であることはこれまでの課題で経験済である。多くの生徒が正十二面体の平行な２面を前後に配置する見取図をかき，その頂点をナンバリングする手法を選択していた（**図 16**）。

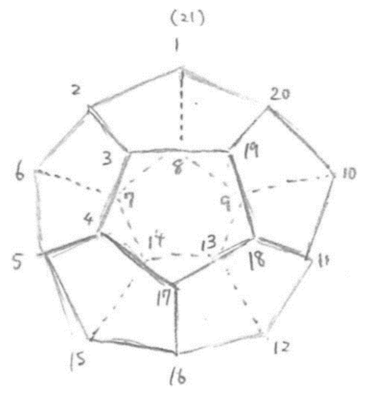


図 16　生徒のワークシート（２）

また，見取図では見かけ上，辺が交差しているため，デメリットを克服するために経路にならない辺を省いた立体を並べてかいたり（**図 17**），立体の高さに注目しながら説明したりするといった工夫も見られた（**図 18**）。しかし，いずれの方法でも経路を比較するのには限界があることも共有された。

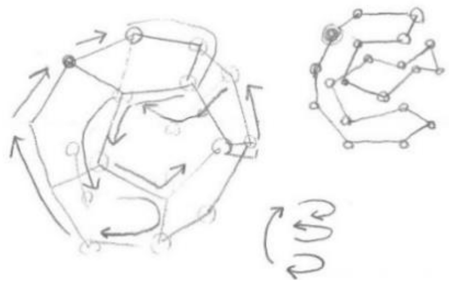


図 17　生徒のワークシート（２）

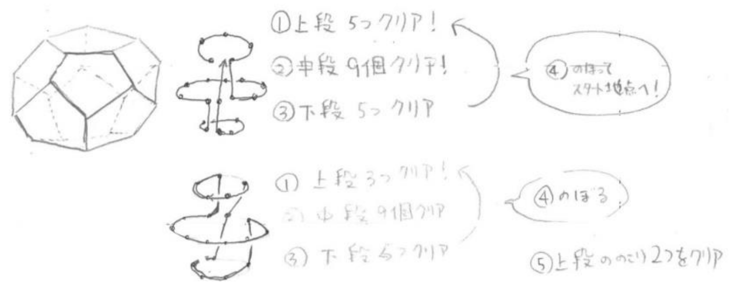


図 18　生徒のワークシート（３）

一方で，展開図では辺が重なることはないものの，１つの頂点や辺が複数箇所に記されてしまう。また，投影図ではそもそも記述されない面が複数ある。したがって，既習のこれら２つの表現方法も，経路探索には不向きであることが確認された。見取図を含めたいずれの方法も，正十二面体のような面同士が直交しない場合は立体の全貌が掴みづらいといった意見が，生徒から次々に述べられた。

上記の気づきを踏まえて，面の形や辺の長さを捨象して，頂点と辺の関係性が保存される「新たな立体の表現方法」の必要性を学級全体で考えた。どの学級でも数名ではあったが，**図 19** のように，展開図から分離された辺や頂点を繋いでいく操作を試みる生徒が現れた。これを題材としながら，不要な線を消していく（分離された点を１つにまとめていく）操作を進めていくうちに，それを見やすく再構成したハミルトン閉路を自力で発想する生徒も現れた。

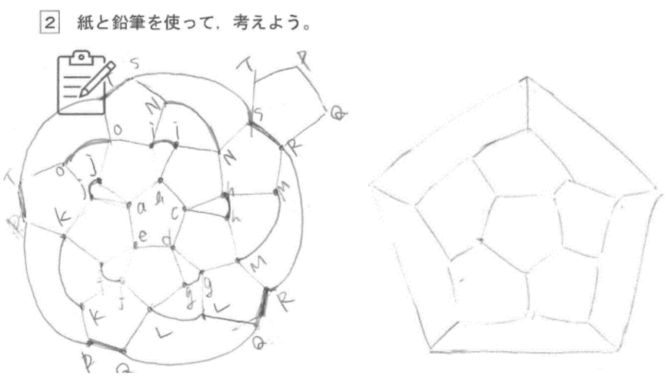


図 19　生徒のワークシート（４）

生徒から離散グラフの発想が生まれた後，立方体を例にしながら具体物と離散グラフを比較した。立方体の上面に近づき，立体を内部から見る，或いは立体の上面を取り除き，立体内部から外側に面を押し広げていく，といった感覚な操作は，動的幾何ソフト（GC）を用いて演示した。また，具体物と離散グラフ上で保存される情報（頂点や辺の数）と，捨象される情報（辺や面の形）を確認しながら，離散グラフの持つ特長を整理した。なお，ここでは離散グラフの複雑性を回避するために，離散グラフを平面グラフ

に限定した。平面グラフとは，辺と辺が立体交差しないもので，換言すれば，辺と辺の交点には必ず点が存在する離散グラフのことである。

この授業の終わりに，1850 年代にウイリアム・ローワン・ハミルトンが考案した Icosian Game をスライドにて紹介した。**図 20** の左の写真は，持ち手のついた半球状の地球にある突起（都市）に，世界一周の経路となる糸をかけていくものである。また，**図 20** の右の写真は，平らな盤面にアルファベットで示された穴（都市）があり，そこに番号の書かれた駒を差し込むものである。２種類の世界一周ゲームの写真を提示すると，盤面と同様の平面グラフをかいていた班からは大きな歓声が上がった。

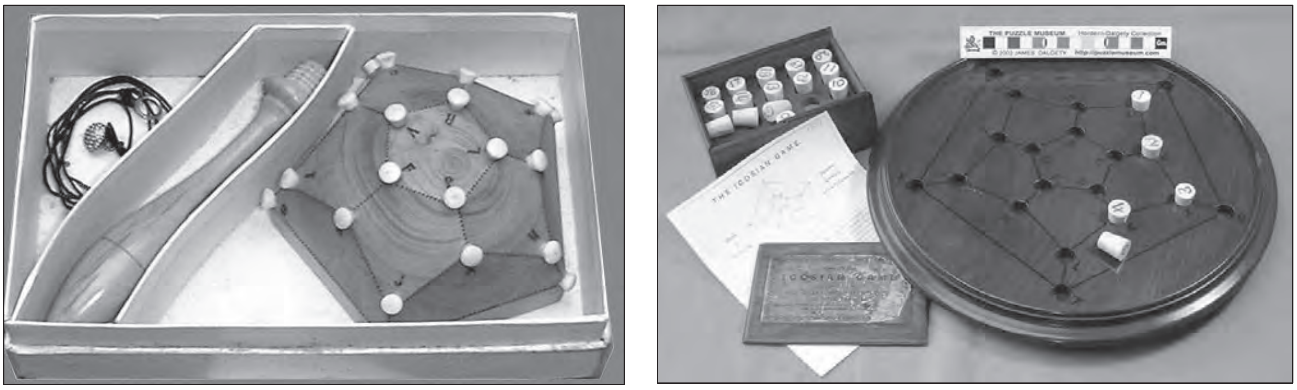


図 20　世界一周ゲーム　https://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm

〈第２次〉…２時間扱い

既習立体の平面グラフを作成し，オイラーの多面体定理を証明することを目標とした。また，現実課題の解決を図る手法として捨象やモデリングを経験し，数学の課題として捉えるよさを体感できる場面を設定した。

《課題１》正多面体を平面グラフで表してみよう。

まず，正十二面体以外の正多面体の平面グラフを念頭操作でかくことに取り組んだ。「小さくなった自分が立体の中に飛び込んで，周囲を見渡しているようだ」といった独特の表現で平面グラフの視点を説明した生徒もいた。面や辺の数が多い立体を平面グラフにする際には，動的幾何ソフトを利用することの有用性を体感していた。立体の新たな表現方法を獲得できたことで，発見した複数の経路が同型かどうかの判定も容易に行うことができていた。

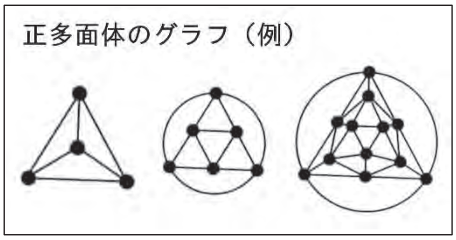


図 21　授業スライドより（２）

《課題２》オイラーの多面体定理　Ｖ頂点－Ｅ辺＋Ｆ面＝２　を証明しよう。

生徒は，中学１年「空間の図形」の単元において，凸多面体でオイラーの多面体定理が成り立つことを帰納的に学習している。頂点，辺，面が持つ関係性を振り返りながら，グラフ理論を用いて多面体定理への演繹的アプローチを試みた。ユークリッド幾何で扱うことのない論証の指導であるため，授業は一斉教授方式を採用した (**図 22**)。これまでは，

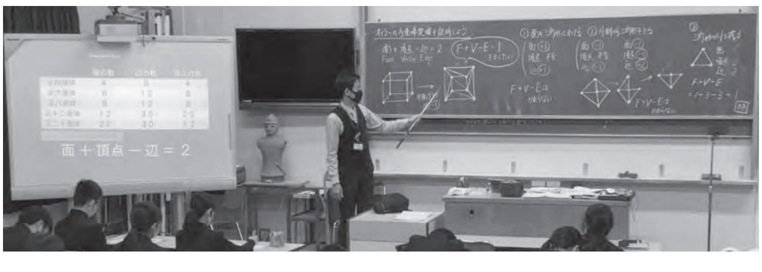
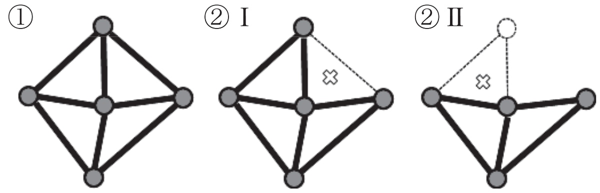


図 22　証明の様子（板書）

経験的に成り立っているものとして鵜呑みにしてきたオイラーの多面体定理を証明することは，数学の納得性を強化する意義があったと捉えている。生徒は２年越しの伏線回収を興味深く味わっていた。証明は以下の通りである。

〔証明〕
○ 多面体を平面グラフにすると１つの面を取り除く操作によって$\mathrm{F}_{\text{面}}$：－１となる．
⇒ Ｖ－Ｅ＋Ｆ＝１を示せばよい
① すべての面を三角形に分割する．
（$\mathrm{V}_{\text{頂点}}$：不変，$\mathrm{E}_{\text{辺}}$：＋１，$\mathrm{F}_{\text{面}}$：＋１）
⇒ Ｖ－Ｅ＋Ｆの値は変わらない
② 外側から三角形を１つずつ取り除く．
（②Ⅰ，②Ⅱで場合分け，②Ⅱを優先する）
⇒ ②Ⅰ（$\mathrm{V}_{\text{頂点}}$：不変，$\mathrm{E}_{\text{辺}}$：－１，$\mathrm{F}_{\text{面}}$：－１）
⇒ ②Ⅱ（$\mathrm{V}_{\text{頂点}}$：－１，$\mathrm{E}_{\text{辺}}$：－２，$\mathrm{F}_{\text{面}}$：－１）
②Ⅰ，②Ⅱのいずれの場合でも Ｖ－Ｅ＋Ｆの値は変わらない
③ ②の操作を繰り返すと，三角形が１つ残る．
このとき，$\mathrm{V}_{\text{頂点}}$：３，$\mathrm{E}_{\text{辺}}$：３，$\mathrm{F}_{\text{面}}$：１であるから，Ｖ－Ｅ＋Ｆ＝３－３＋１＝１となる．〔終〕



《課題３》ケーニヒスベルクの橋渡りの問題を考えよう。

最後に，現実問題を数学化する課題として，ケーニヒスベルクの橋渡りの問題を取り上げた。この課題は「グラフ理論最初の論文」と言われる有名な一筆書きのエピソードであり，捨象や単純化のよさを味わうことのできる題材と考えた。人が築き上げてきた学問としての数学を認識させるため，オイラー（Leonhard Euler, 1707-1783）を改めて紹介しながら授業を展開した。

まず，街のイラストを提示し，課題を与えた（図 23）。何度か試行しているうちに，多くの生徒から「すべての橋を通る経路はない」との予想が生まれた。しかし，そのような経路が存在しないのか，或いは自分が発見するに至らないのかを明確にすることは難しい課題であった。

そこで，これまでに学習してきたグラフ理論を利用したモデリングを検討させた。生徒は話題の中心である橋をグラフ理論における点と対応させるのか辺と対応させるのかで意見が分かれたが，すべての橋を辺に対応させたグラフをかくと一筆書きの課題に帰着できることを確認した。

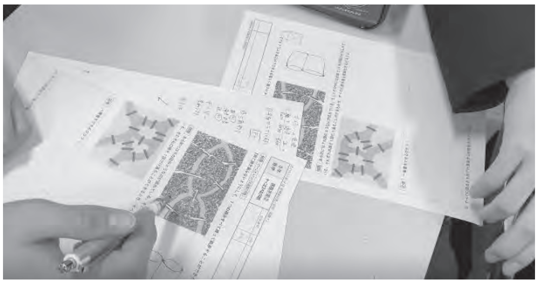


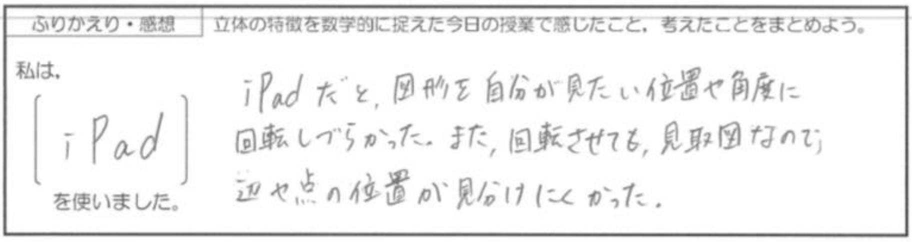
図 23 ケーニヒスベルクの橋渡りの問題

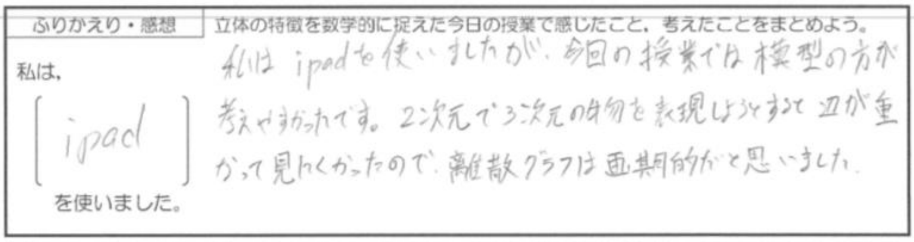
最後に，グラフが一筆書き可能かどうかを判定する方法を少人数で討議させた。複数のグループから，一筆書きの可能な図形は頂点から出ている辺の数に規則があるという発言が生まれた。複数の例を検討しながら，グラフ上のすべての頂点が偶頂点であるか，あるいは奇頂点が２つ（始点・終点）だけであるときにオイラー路が存在することを全体で発見した。このことは，オイラーが示した否定的解決と全く同様である。

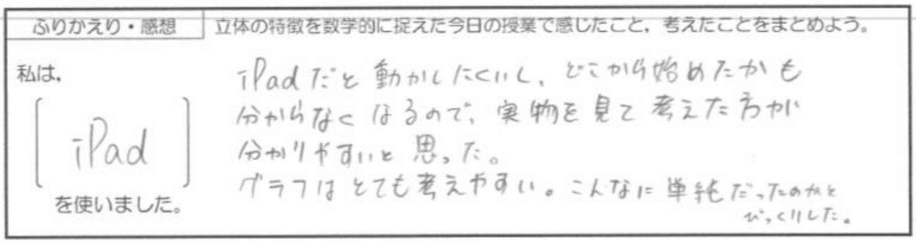
オイラー路の判定方法を整理し，前次で取り組んだハミルトン路の判定方法は現在まで未解決問題として残されていることを伝えて，全４時間の授業を終えた。

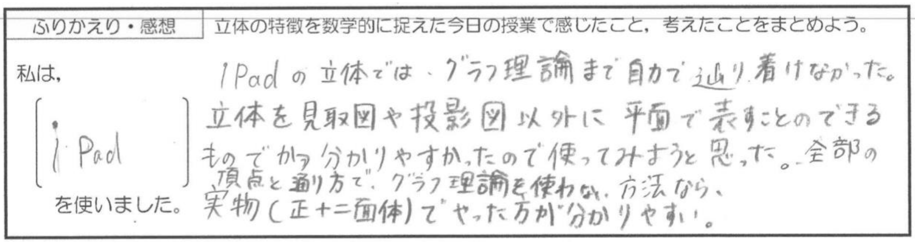
Ⅵ．生徒の振り返り

（1）実物として「ICT機器」を使用した生徒の感想


ふりかえり・感想　立体の特徴を数学的に捉えた今日の授業で感じたこと，考えたことをまとめよう。
私は，[iPad] を使いました。
iPadだと，図形を自分が見たい位置や角度に回転しづらかった。また，回転させても，見取図なので辺や点の位置が見分けにくかった。

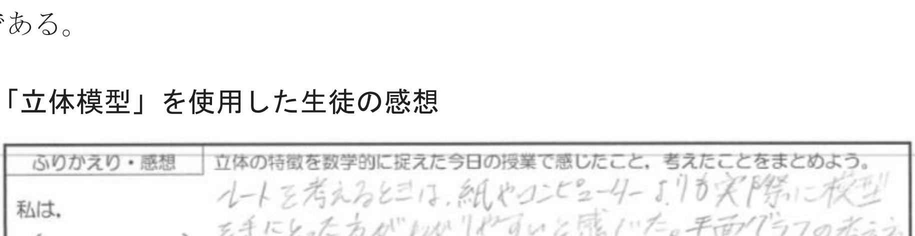

ふりかえり・感想　立体の特徴を数学的に捉えた今日の授業で感じたこと，考えたことをまとめよう。
私は，[ipad] を使いました。
私はipadを使いましたが，今回の授業では模型の方が考えやすかったです。2次元で3次元の物を表現しようとすると辺が重なって見にくかったので，離散グラフは画期的だと思いました。

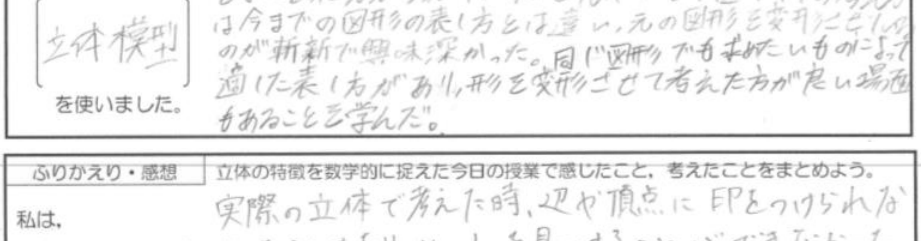

ふりかえり・感想　立体の特徴を数学的に捉えた今日の授業で感じたこと，考えたことをまとめよう。
私は，[iPad] を使いました。
iPadだと動かしにくいし，どこから始めたかも分からなくなるので，実物を見て考えた方が分かりやすいと思った。
グラフはとても考えやすい。こんなに単純だったのかとびっくりした。


ふりかえり・感想　立体の特徴を数学的に捉えた今日の授業で感じたこと，考えたことをまとめよう。
私は，[iPad] を使いました。
iPadの立体では，グラフ理論まで自力で辿り着けなかった。立体を見取図や投影図以外に平面で表すことのできるものでかつ分かりやすかったので使ってみようと思った。全部の頂点を通り方で，グラフ理論を使わない方法なら，実物（正十二面体）でやった方が分かりやすい。

iPadの画面上で立体を操作すると，辺や点の位置関係の把握が困難であると感じた生徒が多かったようである。見取図における前後の重なりは，今回の経路探索には不向きであることを十分に経験してもらえたと同時に，その点を克服する離散グラフの発想は，生徒にとって画期的かつ新鮮であったようである。極めてシンプルでありながらも，新しい数学的な見方・考え方であるグラフ理論を次に使ってみようとする姿勢も育まれたようである。

（2）実物として「立体模型」を使用した生徒の感想


ふりかえり・感想　立体の特徴を数学的に捉えた今日の授業で感じたこと，考えたことをまとめよう。
私は，[立体模型] を使いました。
ルートを考えるときは，紙やコンピューターよりも実際に模型を手にとった方がわかりやすいと感じた。平面グラフの考え方は今までの図形の表し方とは違い，元の図形を変形させたものが新鮮で興味深かった。同じ図形でも求めたいものによって適した表し方があり，形を変形させて考えた方が良い場面もあることを学んだ。


ふりかえり・感想　立体の特徴を数学的に捉えた今日の授業で感じたこと，考えたことをまとめよう。
私は，[立体模型] を使いました。
実際の立体で考えた時，辺や頂点に印をつけられなかったこともあり，ルートを見つけることができなかった。iPadで平面グラフにすると想像がしやすく驚いた。

ふりかえり・感想	立体の特徴を数学的に捉えた今日の授業で感じたこと，考えたことをまとめよう。
私は，［ 立体模形 ］を使いました。	この形までは考えていたのに残りの面も書けることに気付けなかったので少し悔しかった。立体で考えていた時はもしかしたらできないかもしれないと思っていたけど、グラフにしたらルートがたくさん見つかって驚いた。

紙や画面上で立体を扱うよりも，実際に手に取った方が分かりやすいと感じた生徒が多く見られた。一方で，平面グラフをかく際には，立体模型より iPad の画面上での操作の方がイメージしやすいと感じる生徒もいたようである。立体模型で空間的な位置関係を把握したのちに平面グラフ化することで，経路が見つかったとする意見もあり，段階を追って教具を変更したことで理解が深まったとも考えられる。

（３）その他の感想

ふりかえり・感想	立体の特徴を数学的に捉えた今日の授業で感じたこと，考えたことをまとめよう。
私は，［ アイパット ］を使いました。	立体の形自体を変えてしまうという発想がなかったが，必要に応じて必要な形にするというのはとても便利なことだと感じた。これからも何かに応用できないか考えたいと思った。

ふりかえり・感想	立体の特徴を数学的に捉えた今日の授業で感じたこと，考えたことをまとめよう。
私は，［ iPad ］を使いました。	展開図からルートを定める方法を採ったがややこしすぎて上手くいかなかった。形を変えてしまうという方法には驚いた。他の多面体でも世界一周できるのだろうか。

ふりかえり・感想	立体の特徴を数学的に捉えた今日の授業で感じたこと，考えたことをまとめよう。
私は，［ iPad ］を使いました。	立体をグラフで表すことができるならグラフから立体にすることは可能なのかと思った。

ふりかえり・感想	立体の特徴を数学的に捉えた今日の授業で感じたこと，考えたことをまとめよう。
私は，［ アイパッド ］を使いました。	立体の1つの面を広げることで線がつながったまま平面の図にできることに気づけなかったため，ルートを1つも見つけることができなかったのが残念。ただ，発想があってもグラフにするのは面の数がふえるにつれて難しくなると思う。

必要に応じて立体の表現方法を変える，という斬新な見方・考え方を獲得した生徒であったが，その表現方法に優劣はなく，あくまで目的に応じた表現方法であるという理解が見られたのは良かった。また，他の多面体でも世界一周が可能かどうか，といった応用的な課題を自ら発見していた生徒も見られた。授業では見取図から平面グラフをかくことを扱ったが，その逆思考に興味を持つ生徒や，平面グラフで立体を表すことの限界に言及する感想も見られ，グラフ理論を扱う授業の拡がりを感じた。

Ⅶ．研究の成果と課題

（１）中学校で扱う教材としての可能性

中学生はグラフ理論を非常に新鮮な概念として受け入れていた。そして，親しみやすい導入課題から正多面体の構造やオイラーの多面体定理などの既習知を補完していく流れも思考に大きな飛躍はなく，自然な授業設計ができたと感じた。体系的に積み上げられていく数学において，もはや中学校段階で予備知識を必要としない教材は殆ど存在しない。そして，学習塾等で解法のテクニックを予習している生徒が多い集団であるほど，数学的な事実に関して誰もが対等な立場で議論を深めること自体が，決して容易ではない。そのような中で，複雑な計算を伴わない離散グラフの教材は，生徒同士が頭を寄せ合い，横一線で議論を始めることを可能にした。数学を苦手に感じている生徒や，テストの点数に悩んでいる生徒も，自らの考えや判断の前提を明確にし，根拠を示しながら考えや判断について的確な説明をして他に理解を得ようと熱心に取り組んでいた。主体的に課題に取り組む姿がたくさん見られたのは，この課題を設定した大きな成果である。

（２）効果的なICT活用の視点

数学的な見方・考え方を楽しむことと同時に，ICT機器の効果的な活用方法を模索することが大きな研究のテーマであった。今回は，あえて授業内では１人１台端末環境にしないことで，協働的な学びの実現を模索した。この目論見は，端末を共有しながら説明したり思考を練り上げる場面において達せられていたと感じる。また，立体模型とICT機器のそれぞれが生徒の思考を支えるツールとしてどの程度効果的であるのかを比較する場面を設定することができた。生徒の感想にもあるように，常にICT使用が正義ではなく，数学的な思考を活性化させるのに適した方法を生徒が選択できるようになることに意味がある。教育のデジタル化が急速に進む中ではあるが，教具を目的に応じて自由に選択できる力を養うことと，自由に選択できる環境を整えること双方の必要性を感じた。

また，本授業では教具を限定しながら段階的に使用させ，それぞれの教具の持つ有用性を意図的に体験させた。念頭や紙面上の操作，或いは画面上で立体を自在に操りながら思考を深化させるには，それ以前に豊かな空間認知に対する素地が必須であることを痛感した。これは，画面上で正十二面体を自由に回転させるなど，あたかも実物と同じように扱う（**図24**）ことが可能になっても，その操作が念頭操作の助けにならないといった感想が多く見られたことからも，明白である。教具の選択の問題もあるが，どの教具を活用するにも，その前提として空間認知力の土壌を育成する取り組みが必須であることも感じた。

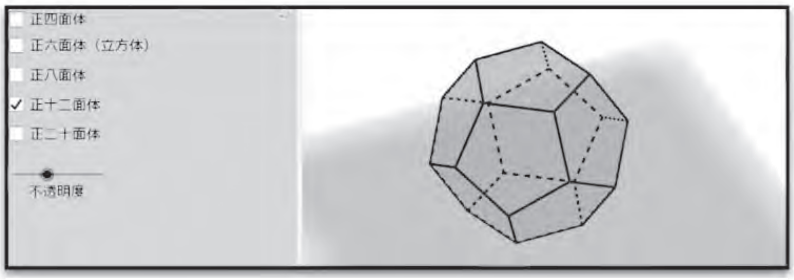


図24　授業で使用したGeoGebra正多面体

https://www.GeoGebra.org/m/cwuUErGD（Tetsuya Akazawa氏 作成）

学習環境にICT機器が充実してくると，生徒一人ひとりに立体模型を揃えることができなくても，端末からその代わりとなる教具を提供できることが大きな利点として挙げられる。教具として販売されている立体模型の類はかなり高額であるから，端末を介して生徒一人ひとりの手元に自由に動かせる立体の見取図があるのは，有効な教具になり得るかと考えた。

しかし，今回の授業実践では，GeoGebraで表示される見取図を自由に回転させても，分かりにくいという印象を抱いた生徒が大半であった。精巧につくられたグラフィックスであっても，画面上からの視覚的な情報が自身の空間認知と一致するとは限らないからであろう。つまり，過去に実物を見たことがあるかどうか，具体物を操作したことがあるかどうかが，画面からの認知に大きく影響していると考えられる。平面幾何の課題では，ICT機器の文房具としての有効性を多くの研究が示しているが，空間認知を必要とする課題に関しては，１人１台端末がすぐさま実物の教具を代替するには至らないと考えられる。

（３）今後の課題

本研究で取り組んだ授業実践では，授業者の体感レベルでは種々の気付きがあった。一方で，ICT活用の

効果の検証という観点においては，幼少期から形成されていく学習履歴や空間認知の経験的背景を定量的に解析することは非常に困難であり,少なくとも数年程度の調査から結論づけることは不可能であると感じた。今回も，授業の途中で２つのグループ（実物を手に取って考えるペアと，GeoGebra の画面上で立体を操作するペア）の２集団を設定して,それぞれ別々に調査して対応のある縦断的なデータを解析しようと試みた。しかし，どの学級で授業した際も，生徒がすぐに２つの教具を混ぜながら議論を始めてしまった。研究としてはいささか物足りない展開にはなってしまったが，これも日常の協働的な学習経験からくる生徒の自然な行動であると捉えれば決して否定されるべきことではないので，そのまま授業を続行した。立体模型を使って互いに説明しながら，画面上を見て紙面上に記録するなど，生徒同士で目的による教具の選別を経験的に実践できていた様子が非常に興味深かった。

中学生がこれまでに学習してきた関数や統計は，問題解決のための手段であり，道具である。物事を関数とみることによって内在する法則や特徴が明らかになったり，問題場面の特徴を捉えるための統計的な数値を利用したりする。無論，「グラフ」を必要とするのもそのためである。そこには必ず「解決したい問い」が必要であるが，日々の授業では教える内容ばかりが先行しがちである。細心の注意を払って，生徒に「解決したい問い」を明確に認識させる授業を展開する必要がある。

今回，グラフ理論で扱う離散グラフを導入するプロセスでは，解決したい問題を古典的教材や身近な話題に設定することで，普段あまり意識することのない数学史を紹介することができた。新たな研究分野発見のプロセスに触れることは，将来，未知の課題に対する姿勢と視座を獲得するために，中学生にとって不可欠な経験となったはずである。今後も，学習指導要領で示されているように，「見方・考え方」が習得・活用・探究という学びの過程の中で働くことを通じて資質･能力がさらに伸ばされ,育まれた資質･能力によって「見方・考え方」が更に豊かになるような相互の関係を生み出す授業・教材の開発に注力したい。生徒たちが数学の無限の可能性を信じ，いま数学を学習する意義を常に見出せるような授業を，今後も目指し続けたい。

Ⅷ．参考文献

文部科学省，中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　数学編
文部科学省，高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　数学編 理数編
岡本和夫，数学活用［数活 301］，H31 発行，実教出版
鈴木晋一，数学教材としてのグラフ理論，2012，学文社
柳本朋子，グラフ理論の教材化，2003，大阪教育大学教科教育学論集
伊藤大雄，イラストで学ぶ離散数学，2019，講談社
ロビンウィルソン，組合せ数学，2018，岩波書店
吉沢光雄，離散数学入門，2019，講談社
中川一史・赤堀侃司，ＰＣ１人１台授業スタートブック，2021，ぎょうせい

（追記）

本稿は，大阪府公立中学校数学教育研究会会誌第 26 号，及び，大阪数学教育会会誌第 45 号で紙上発表した実践報告を再編し，大幅に加筆修正したものである。また，拙稿「１人１台端末の数学授業パーフェクトガイド」（数学教育 No.769，2021，明治図書）p.34-37,「新学習指導要領［完全実施］超直前 SPECIAL」（数学教育 No.761，2021，明治図書）p.70-75 から，一部引用した。

A Graph Theory Class for Enjoying Mathematical Views and Ideas

― Aiming at the use of ICT devices as stationery ―

TORIKAI Takamasa

Abstract: The purpose of this study is to develop a teaching tool that enables students to acquire new ways of seeing and thinking through mathematical activities by using graph theory, which is studied in high school, in junior high school classes. Two classical subjects, Hamilton's Icocian Game and the Königsberg Bridge Problem, are used to introduce discrete graphs. Through this study, I believe that I have been able to propose the usefulness of using mathematical views and ideas.

In addition, in order to make use of the ICT devices that are required in schools these days, I investigated students' perceptions and the actual state of ICT use in geometry learning. Then, I searched for effective ways to use ICT devices in the classroom. I set up effective situations in the class where the use of ICT devices does not become an end in itself. We attempted to create activities in which students would inevitably use ICT devices as stationery to stimulate their thinking. The results of this study were presented online at the 67th Educational Research Meeting in 2020. And were also reported at the Osaka Prefecture Public Junior High School Mathematics Education Research Meeting. This paper is a record of the study.

Key Words: mathematics education, ICT devices, graph theory, Hamiltonian path, Euler's polyhedron theorem