カオスが見られる漸化式の性質

The feature of the recurrence formula with chaotic behavior

Abstract

We used the approximations of the recurrence formula, $x_{n+1}=4ax_n(1-x_n)$ … I in order to calculate the Feigenbaum constant and the regularity of periods after chaos. We found out that the constant was able to be predicted as the even number liner approximation of function I became close to I. The more data of the behaviors of the solution about the approximations we gather, the more accurately the constant can be predicted.

1. はじめに

ここでは$x_{n+1}=f(x_n)$としたときの$f(x_n)=4ax_n(1-x_n)$ ⋯ I を考える。漸化式のx_0，x_1，x_2, ⋯ の推移を解の振る舞いという。解の振る舞いが不規則な状態がカオスである。本研究の目的はカオスが見られる漸化式の一つの特徴であるファイゲンバウム定数を計算で求めるための規則性を明らかにし、カオス後の周期の規則性を発見することである。シュワルツ微分$\left[\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2\right]$が出来なければファイゲンバウム定数は一定にならないので微分不可能な関数を用いてファイゲンバウム定数を近似し、規則性を見つけられると考えた。その際、折れ線の近似関数を用い、折れている回数が偶数のときの関数からはファイゲンバウム定数の近似値を求めることができ、折れている回数が奇数回のときの近似関数はカオス後の周期の元になっていることがわかった。

*ファイゲンバウム定数

I の漸化式において、すべての自然数n において 0≦x_n≦1 を満たすaの範囲、ここでは 0≦a≦1 の範囲でaの値を大きくしていく。すると解の振る舞いは 1 周期→2 周期→4 周期→8 周期→⋯→カオスとなる。2^M周期となるaの値の間隔をb_Mとすると数列｛b_M｝において、M→∞のとき$\frac{b_M}{b_{M+1}}$はある値に収束していく。この値をファイゲンバウム定数という。

2. 研究方法と結果

方法　近似関数の解の振る舞いの導出

① 偶数、奇数のときでそれぞれ次の式を設定する。（mは折れている回数）

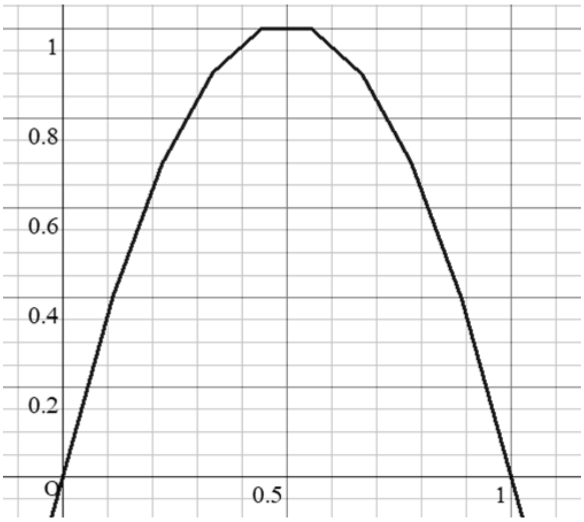
$f(x_n)=-a\frac{4}{m^2+2m}\left(\sum_{k=1}^{m}|(m+1)x_n-k|-\frac{1}{2}m(m+1)\right)$（$m$が偶数）（グラフ 1 参照）

$f(x_n)=-a\frac{4}{(m+1)^2}\left(\sum_{k=1}^{m}|(m+1)x_n-k|-\frac{1}{2}m(m+1)\right)$（$m$が奇数）（グラフ 2 参照）

② 0≦a≦1 においてaを 10^{-6}刻みで解の振る舞いをそれぞれのmの値において求める。

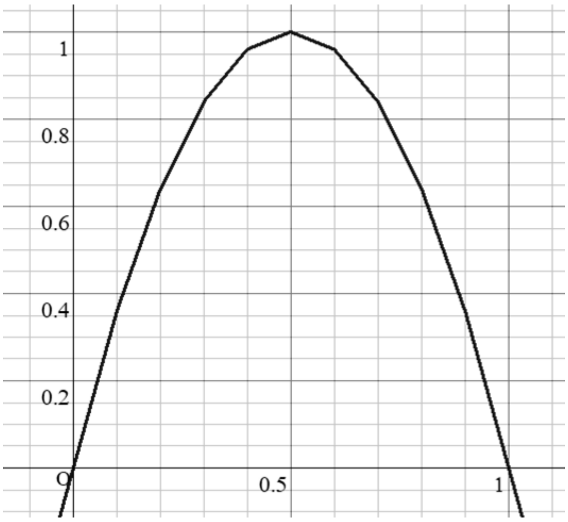
なお C++のプログラムを用いる。本研究では$x_0=0$とした。

（以下mが偶数か奇数かで分ける）



グラフ１　$y=f(x)(m=8)$のときのグラフ

（横軸x、縦軸y）



グラフ２　$y=f(x)(m=7)$のときのグラフ

（横軸x、縦軸y）

⑴ mが偶数のとき

方法

上の近似式における、“はじめに”で述べた$\frac{b_M}{b_{M+1}}$に相当するものをM＝1, 2, 3, 4, 5, 6 において求める。

① 出来るだけ多くのmにおける$\frac{b_M}{b_{M+1}}$を求め Excel でまとめる。

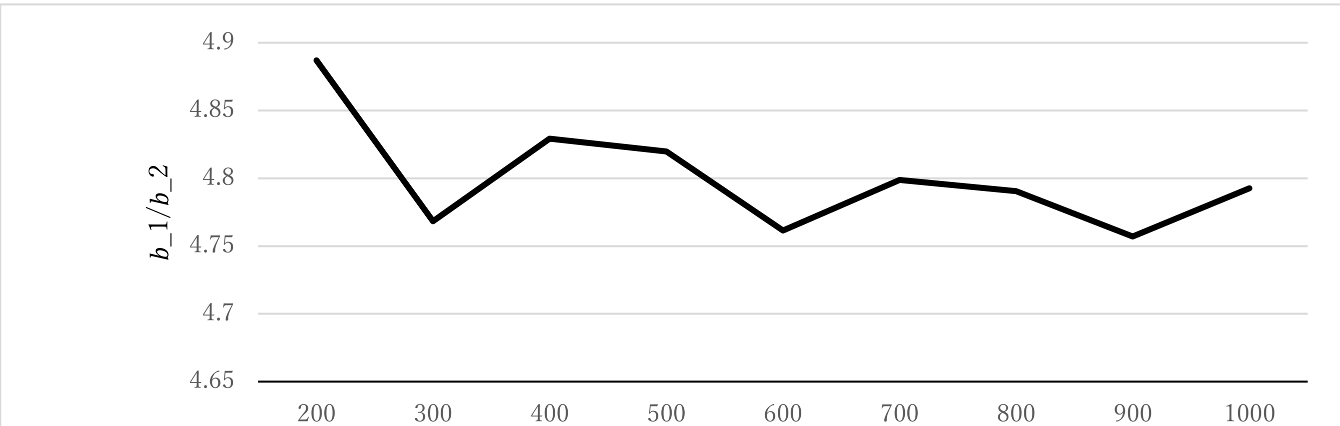
② ①でまとめた表から規則性が見られそうな列を取り出しグラフにする。

表１　各mとMの$\frac{b_M}{b_{M+1}}$の関係

		M					
		1	2	3	4	5	6
m	2	8.869505					
	4	10.38462	10.36777				
	6	3.3351	7.60991	80.36842			
	20	1.934989	4.062351				
	22	7.852523	1.639883	19.98763			
	30	3.30652	2.854101	10.34318	10.81443		
	50	5.160821	2.453305	3.700971			
	100	5.097586	4.569455	4.115292	2.721133	17.65385	
	102	4.651183	5.340524	2.902875	3.220163	16.75862	

	200	4.887032	4.414138	3.713267	2.620561	11.63043	1.095238
	300	4.768225	4.940426	3.343117	6.504545	2.528736	
	400	4.829183	4.826735	3.822153	6.193237	2.090909	
	500	4.819812	4.386338	4.852968	3.674497	2.637168	11.3
	600	4.761403	4.688355	4.364502	5.80402	2.287356	5.117647
	700	4.7989	4.658061	4.642269	4.109023	5.215686	3.1875
	800	4.79043	4.434191	4.798548	4.854626	4.934783	2.3
	900	4.757063	4.646099	4.634791	4.613445	5.409091	1.833333
	1000	4.792745	4.588567	4.863971	3.86371	6.044444	2.25

各mにおける$\frac{b_M}{b_{M+1}}$　は表 1 のようになった。このうち規則性がわかりやすい$\frac{b_M}{b_{M+1}}$はM=1 のときだった。（これはMが大きくなると収束が遅くなるからだと考えられる。）このときm=200, 300, 400, ⋯, 1000 のときの値が収束に向かっていたためグラフ化した。このグラフにおいて極大値のみの値を対数近似し極小値の値のみを対数近似してその交点を求めることによってファイゲンバウム定数の近似値であると考えた。対数近似をする際 Excel を用いたが極大値を近似するときにm=300, 600, 900 の値が抜けるとできなかったので代わりに$\frac{b_M}{b_{M+1}}$のそれぞれ、m=200 とm=400 のときの平均値、m=500 とm=700 のときの平均値、m=800 とm=1000 のときの平均値を用いた。そしてファイゲンバウム定数の近似値が 4. 751339⋯と求められた。



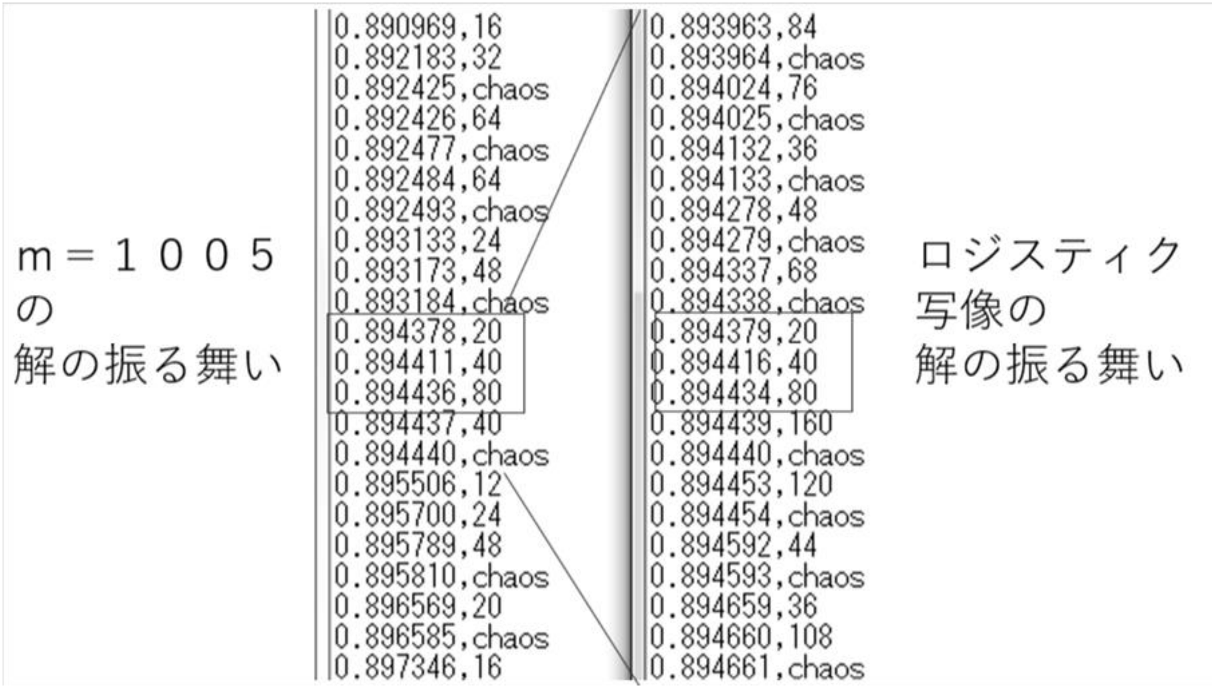
グラフ 3　mと$\frac{b_1}{b_2}$の関係

⑵ mが奇数のとき

方法

算出された解の振る舞いの 2^{M}周期後の周期と I のそれを比べる。

図 1



結果

m=105, 205, …,1005 のときのカオス後に見られる周期がほぼ同じaの値でⅠでも見られることが多かった（図 1 はその例）。しかし例外もあり、例えばm=205 でa=0.895866 のときの 12 周期、m=605 でa=0.962580 のときの 468 周期、m=1005 でa=0.910456 のときの 56 周期とa=0.911310 のときの 464 周期とa=0.984406 のときの 48 周期がⅠでは見られなかった。また、m=705 のときの 0.908491≦a≦0.908508 の周期は 72,36,18 周期と本来の順番と逆転しているところもあった（本来は 18,36,72 周期の順番になる）。

３．考察

mが偶数の近似式からファイゲンバウム定数は減少しながら 4.751339…に収束すると考えられる。しかし、実際のファイゲンバウム定数は 4.669201…と実験的に求められているので差が大きいとわかる。これは解の振舞いを算出したmの数が少ないことに起因すると考えられる。mが奇数のときの近似式のカオス後の周期はⅠのそれのもとになっていると考えられる。

4．今後の展望

解の振舞いを算出したmの値が少ないので十分な考察ができなかった。そのため今後はより多くのmのときのデータを取る必要がある。そして、mの値が偶数のときは対数近似の精度を高め、mの値が奇数のときの解の振舞いからⅠのカオス後の周期の規則性を求めることが今後の展望だ。

5．参考文献

Wolframmathword　https://mathworld.wolfram.com/FeigenbaumConstant.html
『カオス・フラクタル講義ノート』epirents.libhokudai.ac.jp 2011　井上純一