離散力学系におけるカオスとなりうる条件

～二次元への拡張～

Conditions for possibility of being chaos in discrete dynamical systems

-Extension to two dimensions-

Abstract

Previous studies have shown that you can judge if some recurrence formula can be considered a state of chaos. However, it's not certain if other formula can be considered a state of chaos. And thus, we created a series of functions by changing some terms or increasing the degree of Henon map. We studied how the values change by carrying out the calculation of the formula. We created bifurcation diagram on the basis of the result. We found most functions can be considered chaos. However, we couldn't find on what the chaos depends.

１．はじめに

1963 年、アメリカの気象学者 Edward N. Lorenz が大気の乱流現象をコンピューターで解析し、大気の動きは方程式の初期値に敏感に左右されることを発見した。このような初期値鋭敏性によって解の振る舞いが複雑になる現象はカオスと呼ばれ、「非線形な決定論的力学系から発生する、初期値鋭敏性を持つ、有界な非周期軌道」と定義された。先行研究では、一次元離散力学系の漸化式でカオスになりうるものでシュワルツ微分の結果が負になるものはファイゲンバウム定数が 4.699…となる、と述べられている。また、この条件を満たす関数としてロジスティック写像やローレンツ方程式の他にエノン写像がある、と述べられている。しかし、二次元離散力学系については述べられておらず、この条件を二次元離散力学系の関数であるエノン写像にどのように適用するのかは不明である。そこで上記と同じ振る舞いをする二次元離散力学系の関数エノン写像と、他のカオスになりうる関数の類似点や相違点及びカオスとなる条件を明らかにする。なお、2 つの式がどちらも二次以下であればエノン写像と同じ振る舞いをするという仮説を立てた。なお、エノン写像の式および周期倍分岐図は以下のとおりである。

式：x(n+1)=1-a*x(n)^2+y(n)

　　y(n+1)=b*x(n)

　　ただし、a,b はパラメータ

周期倍分岐図：下図１

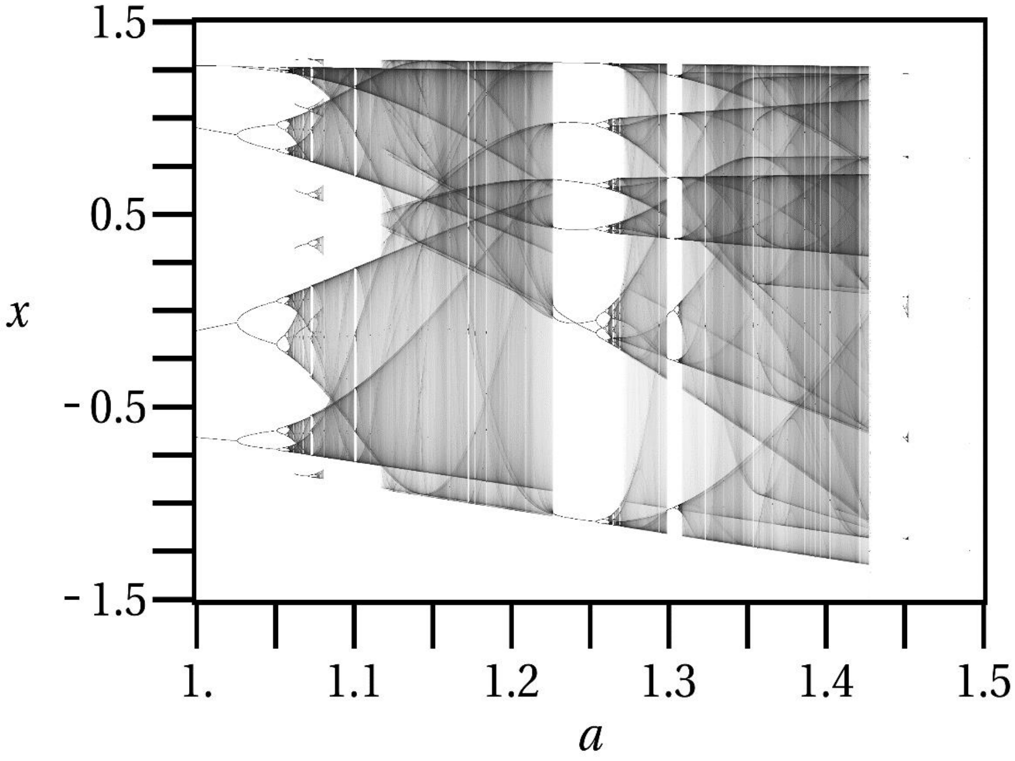

図 1.エノン写像の周期倍分岐図

2．研究方法

（1）エノン写像に手を加えてより高次の二次元離散力学系のカオスになるような関数を作る。

（2）（1）で作った関数について、Excel で周期倍分岐が起こる点や周期の窓となる条件を調べ、周期倍分岐図を作成する。

（3）（2）で得られた周期倍分岐図をエノン写像や他の関数の周期倍分岐図と比較する。もし似たような形の部分が現れた場合、ファイゲンバウム定数と周期の窓の位置が一致するかどうかも確かめる。

3．研究結果

次数の関係上、シュワルツ微分の結果が常に正となる関数は作成できなかった。作成した周期倍分岐図には、エノン写像と同様の振る舞いをしたものと、異なる振る舞いをしたものが存在した。作成したうち、2 つの式のうち 2 つとも 2 次以下の関数は、全て下の図 4,5(関数 10)のようなふるまいをした。この周期倍分岐図では a が 0 よりも小さい場合のときの値をとっていないため、図 1 のエノン写像の周期倍分岐図の後ろの部分が出てきたのだと考えられる。一方、3 次以上の項を持つ関数の中には、下の図 2,3(関数 3)のようにエノン写像の周期倍分岐図とは異なる振る舞いをしたものもいくつか存在した。

（1）関数３

初期値は x(0)=0.5,y(0)=0.5 で、パラメータは b=0.02 で固定し、a を変動させた。

式は　x(n+1)=y(n)+1-a*x(n)^2

　　　y(n+1)=b*x(n)^2-y(n)

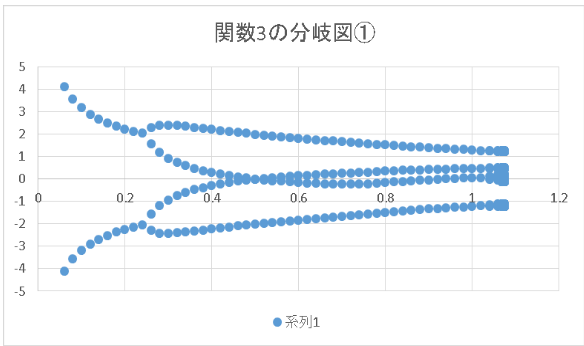

図 2. 関数 3 の x についての周期倍分岐図

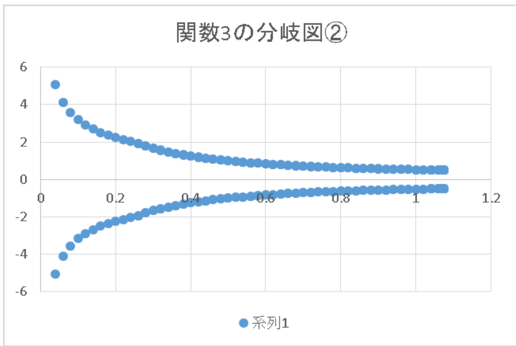

図 3. 関数 3 の y についての周期倍分岐図

(2)関数 10

初期値は $x(1)=0.3, y(1)=0.3$ で、パラメータは $b=0.01$ で固定。

式は　$x(n+1)=y(n)+1-a*x(n)^2$

　　　$y(n+1)=b*x(n)^2-y(n)^2$

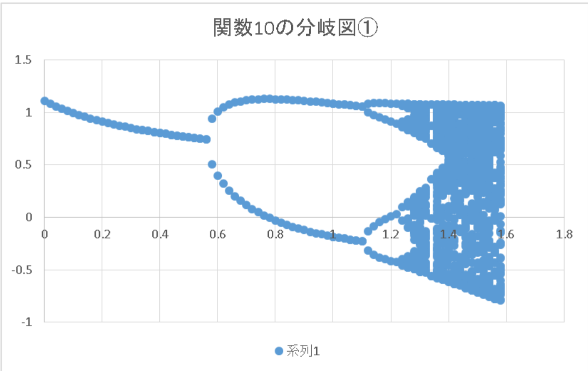

図 4. 関数 10 の x についての周期倍分岐図

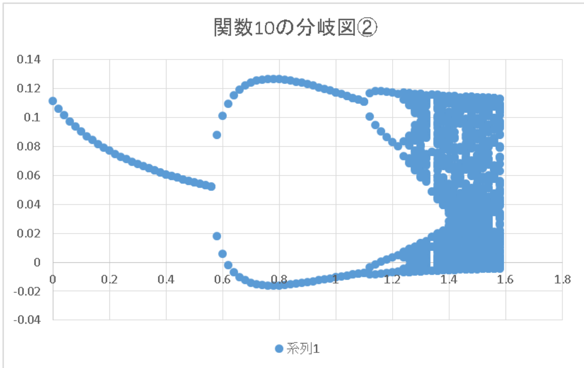

図 5. 関数 10 の y についての周期倍分岐図

4．考察

x と y についての両方の式が 2 次以下の関数の振る舞いはすべて関数 10 のように、エノン写像と同じようになった。このことから、ほかの関数についても、関数を構成する 2 つの式がどちらも 2 次以下のものは同じようなふるまいをすると考えられる。これは、シュワルツ微分をした結果がどれも一様に 0 という値になるからであると考えられる。また、2 つの式のうち片方、もしくは両方が 3 次以上である関数の中には、関数 3 のように特徴的なふるまいをするものも見られた。これは、シュワルツ微分の結果が特異的に無限大に発散する点があるため、性質が変わったのだと考えられる。ただ、そのように特徴的なふるまいをするものは多くはなかったため、どのような条件でそうなるかなどまでは調べることができなかった。

5．結論

今回扱った関数の中では、関数を構成する 2 つの式のうち両方が 2 次以下であるものについては、エノン写像のようにふるまうということが確認できた。だが、これが 2 次以下のあらゆる関数において成立するかは確かめられなかった。

関数を構成する式に 3 次以上の項が存在する関数の中には、いくつかエノン写像とは異なるふるまいをするものも確認できた。このことから、シュワルツ微分の結果が関数の性質を決定するうえで寄与しているのではないかと考えられる。だが、立証はできていない。

6．今後の課題

今回は２、３次の式しか扱わなかったが、４次まで拡張し、シュワルツ微分の結果が常に正となる

ような関数を作ることが最も優先的に取り組むべき今後の課題である。また、関数を作った際に、係数にあまり注目せずに作り、２次同士の式の中でもいくつかしか扱えず、あらゆる 2 次以下の関数がエノン写像のようにふるまうのかどうかを立証することができなかったため、係数を順にずらし、変化させることでより多くの関数を扱うことも必要である。

７．参考文献

シリーズ〈非線形科学入門〉3 カオス」船越 満明 著 2008 年

「整数ロジスティック写像の諸性質：発散，収束，周期性」董 際国，森田 啓義 著 2013 年

https://mathworld.wolfram.com/FeigenbaumConstant.html

https://ja.m.wikipedia.org/wiki/カオス理論