

数学とコンピュータによる遠近法の保存と解析

2次元から3次元への逆再生

Analysis and Conservation of perspective by Mathematics and Computers

-Reverse playback from two dimensions to three dimensions-

Abstract

Last year, we created a program that converts three-dimensional data into planar data using perspective. The purpose of this study is to reverse the program and to convert two-dimensional data to three-dimensional data. Currently, it is possible to create a three-dimensional image based on eight points, but with further development of this research, it will be possible to create three-dimensional data with only flat illustrations or photographs.

1. はじめに

昨年度、1点、2点、3点透視図法を用いて3次元データを2次元データに変換するプログラムを作成した。本研究では、反対に2次元データから3次元データに変換するプログラムを作成し、写真やイラストの2次元データを3次元データとして表示させることを目的とする。

2. 研究方法

xyz空間を設定し、xy平面に直方体の2次元データを設定する。設定した2次元データを3次元データに変換するベクトル方程式を、プログラムとして作成する。計算過程に10進BASICを用いたが、研究過程でGeoGebraでも算出可能なことが分かったため、Geogebraで変換を行う。また、GeoGebraに各頂点の座標の成分を入力して表示させる。

3. 考察、結果

(1) ベクトル方程式の立式

まず、 $z < 0$ の範囲に視点を、xy平面上に直方体の8頂点の2次元データを設定した。視点を始点、xy平面上の各頂点を終点としたベクトル方程式を立式し、その距離を0以上の実数倍させることで、 $z > 0$ の範囲に直方体の各頂点の3次元データを算出できるのではないかと考えた。

- ① 原点0と視点P(k, l, m)を設定する。
- ② xy平面上に1点透視図法で描かれた任意の直方体の8頂点(ABCD-EFGH)を設定する。

この時、 $a > 0$ であり、 b, g も同様の範囲である。

$$A = (a, b, 0)$$

$$B = (c, b, 0)$$

$$C = (c, d, 0)$$

$$D = (a, b, 0),$$

$$E=(f, g, 0)$$

$$F=(c+f-a, g, 0)$$

$$G=(c+f-a, d+g-b, 0)$$

$$H=(f, d+g-b, 0)$$

- ③ P を始点、A, B, C, D, E, F, G, H を終点としたベクトル方程式を立式する。

$$PA=(a-k, b-1, -m)$$

$$PB=(c-k, b-1, -m)$$

$$PC=(c-k, d-1, -m)$$

$$PD=(a-k, d-1, -m)$$

$$PE=(f-k, g-1, -m)$$

$$PF=(c+f-a-k, g-1, -m)$$

$$PG=(c+f-a-k, d+g-b-1, -m)$$

$$PH=(a-k, d+g-b-1, -m)$$

- ④ ③で算出した式を s 倍 (s は 0 以上の実数とする) し、 $z>0$ の範囲に算出する。

この場合、直方体の xy 平面に平行な二面のうち、視点側の平面 ABCD に比べ、平面 EFGH については奥行きの変換が必要となるため、EFGH の z 座標の式においては n 倍 ($n=s(b-1)/g-1$) する。

$$PA'=(s(a-k), s(b-1), s(-m))$$

$$PB'=(s(c-k), s(b-1), s(-m))$$

$$PC'=(s(c-k), s(d-1), s(-m))$$

$$PD'=(s(a-k), s(d-1), s(-m))$$

$$PE'=(s(f-k), s(g-1), n(-m))$$

$$PF'=(s(c+f-a-k), s(g-1), n(-m))$$

$$PG'=(s(c+f-a-k), s(d+g-b-1), n(-m)),$$

$$PH'=(s(a-k), s(d+g-b-1), n(-m))$$

- ⑤ ②で設定した位置ベクトルと④で算出したベクトル方程式の和が 3次元データの位置ベクトルとなる。

$$A' = A + PA' = (k+s(a-k), 1+s(b-1), m+s(-m))$$

$$B' = B + PB' = (k+s(c-k), 1+s(b-1), m+s(-m))$$

$$C' = C + PC' = (k+s(c-k), 1+s(d-1), m+s(-m))$$

$$D' = D + PD' = (k+s(a-k), 1+s(d-1), m+s(-m))$$

$$E' = E + PE' = (k+s(a-k), 1+s(b-1), m+n(-m))$$

$$F' = F + PF' = (k+s(c+f-a-k), 1+s(g-1), m+n(-m))$$

$$G' = G + PG' = (k+s(c+f-a-k), 1+s(d+g-b-1), m+n(-m)),$$

$$H' = H + PH' = (k+s(a-k), 1+s(d+g-b-1), m+n(-m))$$

(2) 3次元データとしての視覚化

(1) で作成した式を用いて、算出した値を 3次元データとして視覚化した。まず、(1) の式を 10進 BASIC 上で作成した。この時、 A' を AA というように表現した。各変数に任意の数値を代入すると、3次元上の各座標が算出される仕組みとなっている。この値を立体として表現する手段として、Geogebra を選択した。当初 10進 BASIC で算出させた値をそのまま

入力する予定であったが、Geogebra 上でも変数を用い、式を組み込むことが可能だと分かったため、Geogebra を使用した。これにより、プログラム内での回転が可能になった。

10 進 BASIC 上では (1) に示した式を各座標ごとに順序だてて計算していたのだが、Geogebra を用いてプログラムに変換する際に、入力する式の形態を一部変更した。座標のみの各変数の値と、三次元における値のみ算出する形にした。(図 1 参照) これにより、3 次元化した直方体を視覚的にとらえることが出来るようになった。

ここで、実際にこのプログラムが使用可能かという検証を行った。まず、机の上に 1 辺 10cm の立方体を置き、次に、その立方体の側面から 10 cm 離れた場所からスマホで撮影を行った(図 2)。撮影した写真を印刷し、写真の左下を原点として各座標を測り、それらの座標をプログラムに代入するという方法を取った(図 3)。図 3 のように立方体に近い形で出力される場合もあるが、直方体の形は s (変数) や視点を設定する位置により変化する為、その都度定義していく必要がある。

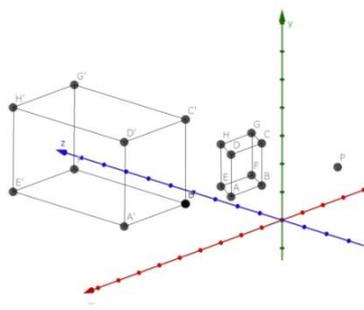


図 1 Geogebra におけるプログラムの一部

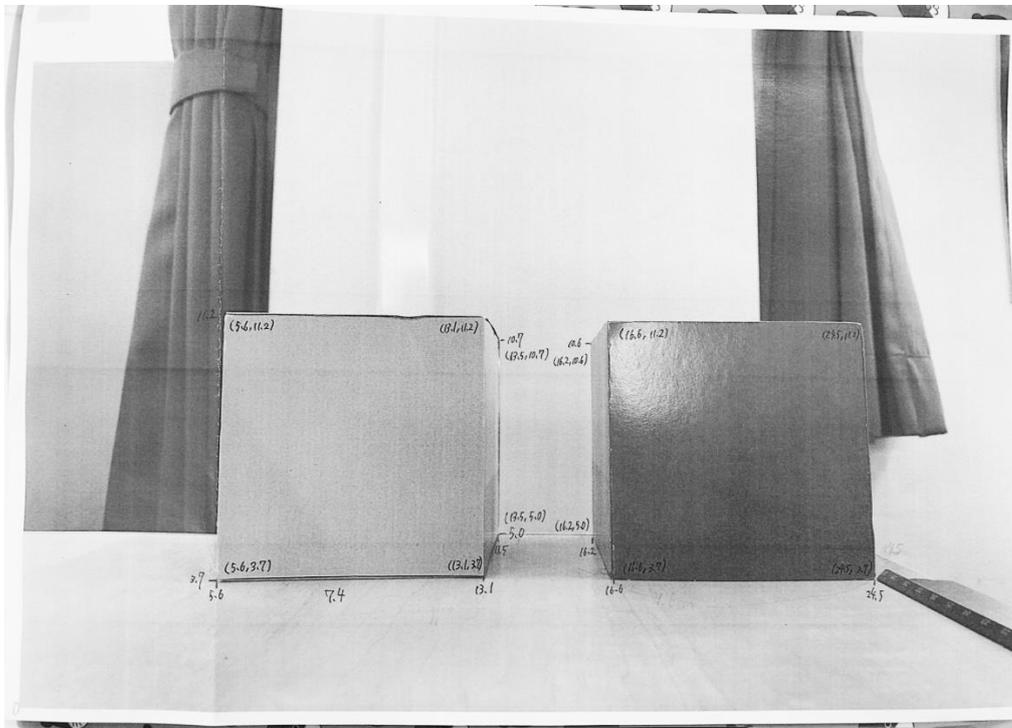


図 2 座標を書き込んだ写真

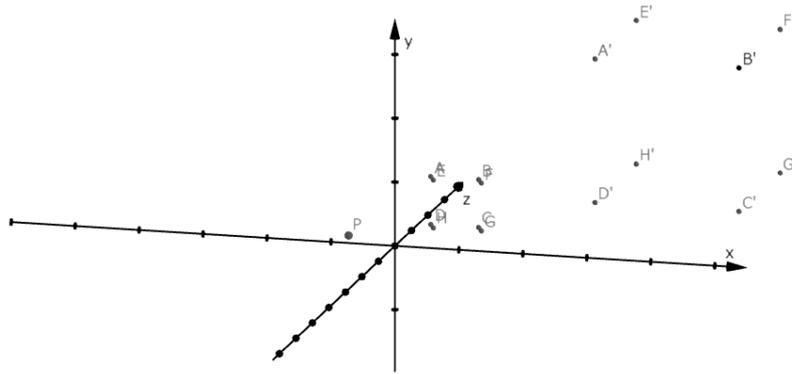


図 3 Geogebra において出力させた場合

4. 今後の課題

- (1) 入力する値や視点の位置によって、 E' 、 F' 、 G' 、 H' の値が正しく算出できない不備を改善すること。
- (2) 同様の方法を用いて、2点透視図法を用いたプログラムを作成し、変換可能なものを増やすこと。
- (3) ベクトルを用いたプログラムを作成すること。初期段階において、視点と2次元データの各座標を結び、延長させた点を3次元データの座標とし、ベクトルを用いて思考していたが、奥行きを表現するにあたって z 座標のみに異なる変数をかける必要が生じた。それにより、今回は座標ごとに計算するプログラムとなったため、 E 、 F 、 G 、 H 各点の z 座標のみではなく、全体に s と n の関係性を組み込んだ何らかの値をかけることで3次元データが算出可能なような、より初期の理論に近いプログラムを作成する。
- (4) 直方体以外が描かれた2次元データの立体化も可能なプログラムを作成する。今回は背面も予想可能な図形を用いたため3次元データへの変換が可能であったが、背面の予想できないイラストや画像の場合、片面のみの3次元データ化となることが予想される。その場合、値の算出が可能な部分のみ変換を行い、不可能な部分は変換しないようなプログラムの作成方法を模索する必要がある。
- (5) 色の濃淡など、手前側と奥側などの遠近感を二次元データから判別する方法を明確化すること。

5. 参考文献、URL

- ・「エッシャーの宇宙」 坂根巖夫 朝日新聞出版 1983年
- ・「科学技術としての遠近法の変遷」 加藤道夫 2005年
- ・「パースに合わせて作画すると、不自然に歪んでみえるのですが、自然に描くにはどうしたらいいですか？」 AQUANTA'S WEB 2017年 https://a-quanta.com/p_draw003/
- ・「数学とコンピュータによる遠近法の保存と解析」 片山優華他 2021年