38 離散力学系におけるカオスとなりうる条件～二次元への拡張～

Conditions for possibility of being chaos in discrete dynamical systems ～Extension to two dimensions～

Abstract

Previous studies have shown that you can judge if some recurrence formula can be considered a state of chaos. However, it's not certain if other formula can be considered a state of chaos, so we created a series of functions by changing some terms or increasing the degree of Henon map.We studied how the values change by carrying out the calculation of the formula. We created bifurcation diagram on the basis of the result. We found most functions can be considered chaos. However, we couldn't find on what the chaos depends.

目的

先行研究では一次元離散力学系の漸化式でカオスになりうるものでシュワルツ微分の結果が負になるものはファイゲンバウム定数が4.699…となる、と述べられている。しかしこれは二次元離散力学系についても適用されるのかは不明である。そこで上記と同じ振る舞いをする二次元離散力学系の関数エノン写像とカオスになりうる関数の類似点や相違点およびカオスとなる条件を明らかにする。なお、2つの式がどちらも二次以下であればエノン写像と同じ振る舞いをするという仮説を立てた。

方法

1.エノン写像に手を加えてより高次の二次元離散力学系のカオスになるような関数を作る。
2.1で作った関数について、Excelで周期倍分岐が起こる点や周期の窓となる条件を調べ、周期倍分岐図を作成する。
3.2で得られたデータをエノン写像や他の関数の周期倍分岐図と比較し、ファイゲンバウム定数と周期の窓の位置の一致が確かめられたら、仮定は高い確率で合っているという予想が立つ。

結果と考察

得られた周期倍分岐図のうち、特徴的だった関数3と、比較的エノン写像に近いふるまいをした関数10の分岐図を右に載せた。

次数の関係上、結局シュワルツ微分の結果が常に正となるような関数を作成することはできなかった。

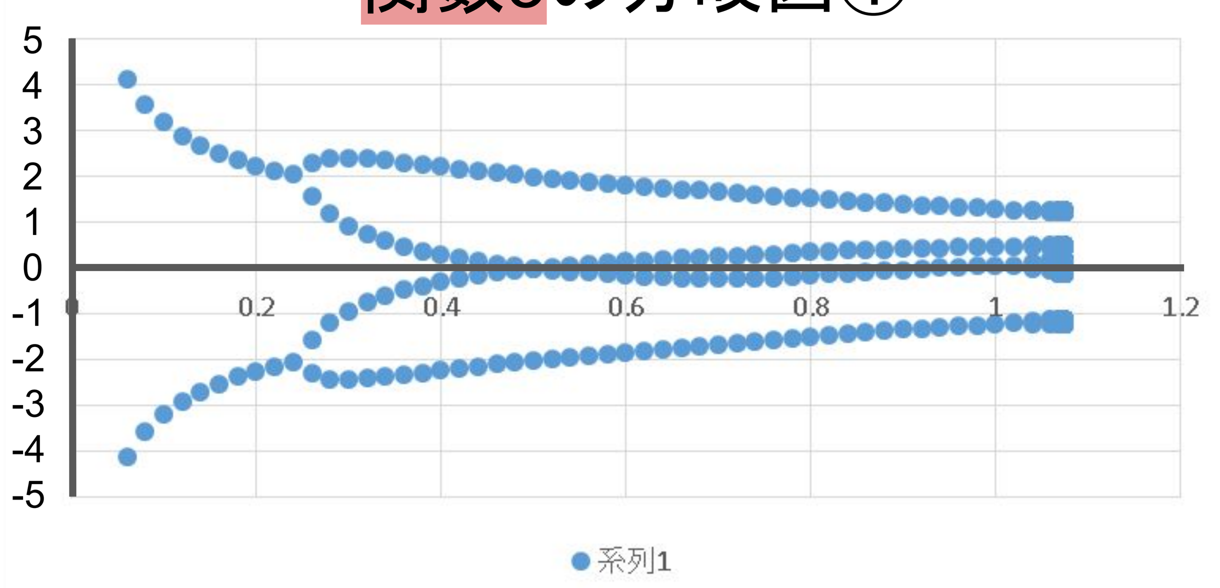
2つの式がともに二次元以下の関数は全てエノン写像と同様のふるまいをした。

→2次元以下の式では全て同様の振る舞いをすると考えられる。

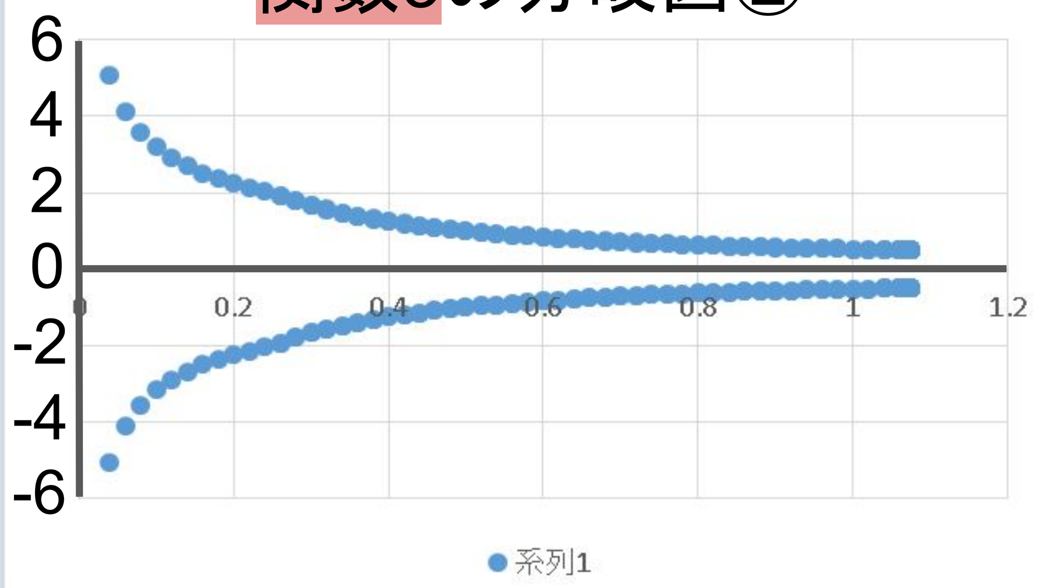
また、3次以上の項を持った関数の中には異なる振る舞いをしたものも存在した。

→3次以上になるとシュワルツ微分の結果が一時的に無限大になるような点も存在するから異なる振る舞いをとった。

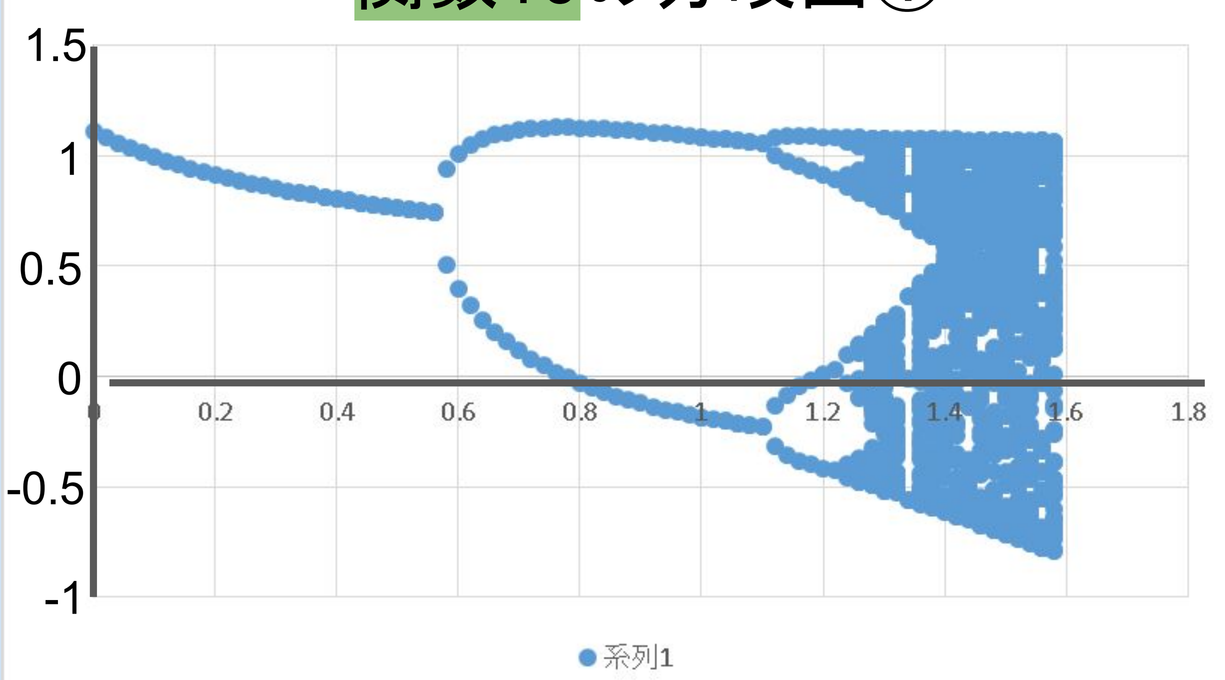
関数3の分岐図①



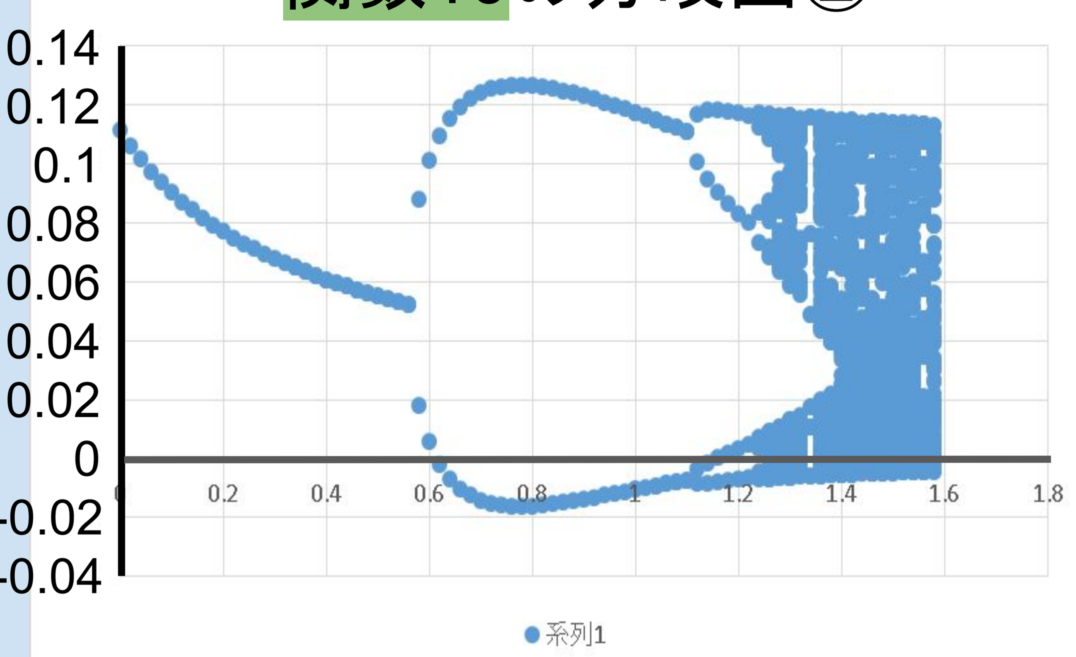
関数3の分岐図②



関数10の分岐図①



関数10の分岐図②



今後の展望

2, 3次元ではシュワルツ微分の結果が負になるような関数を作るのが難しいので4次元まで拡張して関数を作る。

2次元の式であらゆる式を扱うことができなかったので、係数を順にずらして行くようなプログラムを作成して、扱う関数の種類を増やす。

参考文献

「シリーズ〈非線形科学入門〉3 カオス」船越 満明 著 2008年
「整数ロジスティック写像の諸性質：発散，収束，周期性」董 際国，森田 啓義 著 2013年
https://mathworld.wolfram.com/FeigenbaumConstant.html