

常用対数

～常用対数表を利用して対数の世界へ～

授業者 附属高等学校池田校舎 藤堂 淳司

1. 対象 附属高等学校池田校舎 第2学年3組(41名)

2. 題材目標

・知識及び技能に関して

- ①常用対数表を利用し、大きな数の乗法・除法を加法・減法で行うことができる。
- ②対数の基本的な性質を用いて、簡単な対数の計算をすることができる。

・思考力、判断力、表現力等に関して

- ①常用対数表を利用することで、実際に計算をしなくても自然数の累乗の桁数や最高位の数が求められることができる。
- ②概数の計算であることを認識し、実際の計算結果とズレが生じる理由を考えることができる。

・学びに向かう力、人間性等に関して

- ①対数がどのような経緯で用いられることになったのかを数学史を通じて理解することで、数学の日常生活における必要性を理解し、その有用性を認識する。
- ②複雑な乗法・除法などの計算が対数の加法・減法で行うことができるという対数のよさを実感する。

3. 指導に当たって

(1)教材観

コンピュータや計算機が発達し、現在のように手軽に計算できるようになる以前において、対数計算法は役に立つ場面が多かった。大航海時代において、航海術に必要とされる天文学では、非常に大きい桁数を持つ数の乗法・除法が要求される。例えば4桁の2数の積を求めるだけでも、2数の1桁の掛け算が16回と2数の足し算が12回も必要になる。2数の桁数が増えていくとその計算量はさらに膨大なものとなる。このような大きな数の乗法・除法は多くの天文学者を苦しめた。その中で、積を和に変換することができる三角関数の和と積の公式を用いることで、一度の計算に必要な掛け算の回数が大幅に削減され、計算に必要な労力は軽減したが、それでも計算は大変であったという。その後、ジョン・ネイピアはその膨大な計算量を軽減するために新しい計算法を模索し、そこで考案されたのが対数による計算法であった。ネイピアが作成した対数表は、底は10ではなく0.99999999として作成されている。その後、ヘンリー・ブリッグスがその対数表を改良し、底を10とした対数である常用対数表を完成させた。

常用対数の導入の場面について、大航海時代に使用された計算方法の一例として球面三角法の余弦定理を紹介する。そこでは3つの三角比の積が現れる。2つの三角比の積は和と積の公式を用いて速やかに計算できるが、3つの三角比の積は一度の計算で行うことができない。常用対数表を用いた計算ならば、複数の数の積を一度の計算で求めることができるので、和と積の公式を用いた方法より簡単であることを生徒に認識させたい。

対数がどのような経緯で研究されるようになったのかを数学史を通じて理解し、数学が日常的に必要であったことを理解させ、現在ではどのような場面で対数が使われているのか知るために、地震のマグニチュードを題材として扱う。

(2) 生徒観

本クラスでは単元の導入において、二次関数では文化祭の最大の利益の出し方や、三角比では身の回りの角度など、日常生活に結びつく内容で学習を始めた。その背景には、現在学習している高校数学が日常の中に隠れているということ認識してほしいという思いがある。生徒にとって数学を学ぶ意義を求めることについての解答の一つとして、日常生活における数学の有用性を感じ取ってもらいたい。

また、新しい公式の学習においても、教員が一人で説明をするのではなく、公式を導出するきっかけを生徒に与えて、生徒一人一人が自らの力で公式にたどり着くように働きかけてきた。その結果、証明や計算過程を丁寧に書くことができたり、自分の考えを自分の文章で書くことができる生徒が増えたと実感している。

本クラスの生徒は授業内の雰囲気がよく、教員と生徒のコミュニケーションがしっかりと取れているので、机間巡視中も質問が多く出る。また、生徒どうしの話し合いや助け合いが多く、教室全体で数学を学ぼうという姿勢が見られる。

発想力や思考力の高さが伺える本クラスだが、定期考査の解答や板書の内容から生徒の計算力が低い場面が見られる。計算・解答の速さを追求するだけでなく、丁寧に問題と向き合う姿勢を身につけてほしい。

(3) 指導観

上記の点を踏まえ、以下の2点に注意して指導を行う。

① 常用対数表の有用性を、数学史を通じて伝える。

常用対数の単元は、数の桁数や小数点の位置を調べるだけで終わらせてしまう場合もあるが、その場合は常用対数表の使い方や常用対数の意味、常用対数が生まれた経緯などを伝えずに進めることがある。どのような経緯で常用対数が生まれたのか、どのように常用対数が使われてきたのかを知ることで、常用対数に対する理解を深めていきたい。

② 計算時間の十分に確保する。

常用対数表を用いることで大きな数の計算は比較的簡単になるのだが、計算過程ではさまざまな指数法則に加えて小数の加法も現れる。大航海時代の計算を体験するという意味を持たせて、本時の授業では計算機の使用は認めない。そのため、計算時間には余裕を持たせて、丁寧に解かせる必要がある。

4. 評価規準

知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
指数法則・対数の性質を理解し、正しく式変形をすることができる。 指数関数・対数関数を用いて、様々な方程式・不等式を解くことができる。 常用対数表を用いて、目的の値を調べることができる。	指数関数・対数関数のグラフの特徴を理解し、それを用いて、方程式・不等式を考察することができる。 真数条件に注意しながら方程式・不等式を考えている。	学習した内容を活かし、自ら様々な問題に取り組もうとする。 日常生活にまつわる課題に関して、指数関数・対数関数の考え方をを用いて解決しようとしている。

5. 単元の指導計画(全8時間)

時間	学習内容	主な評価規準	評価の観点			評価方法
			知技	思考	態度	
1, 2	指数の拡張	指数法則を理解し、拡張された指数を用いて計算できる。	●			ワークシート
3	指数関数	指数関数のグラフを用いて、指数方程式・指数不等式を解くことができる。	●	●	○	小テスト
4	対数とその性質	対数の性質を理解し、対数の性質を用いて計算することができる。	●			ワークシート
5, 6	対数関数	対数関数のグラフを用いて、対数方程式・対数不等式を解くことができる。その際、真数条件に注意して解くことができる。	●	●	○	小テスト
7, 8 【本時】	常用対数	常用対数表を利用して、概数や桁数を調べることができる。	●	●	○	ワークシート・ 小テスト

●…形成的評価(指導に活かす評価) ○…総括的評価(記録に残す評価)

6. 本時の展開

(1) 本時の目標

(ア) 常用対数表を用いて、大きな数の乗法・除法を行うことができる。

(イ) 数学史を通じて、大航海時代では対数が必要不可欠であったことを認識し、現代における事象について対数を用いて考察することができる。

(2) 本時の評価規準

- ① 常用対数表を見て、常用対数を正しく答えている。
- ② 整数以外の四則演算を適切に計算している。
- ③ 指数法則・対数の性質を用いて、適切に計算している。
- ④ 日常生活における数学の有用性を理解し、数学を実社会の事象に適用しようとする。

(3) 本時で発揮されるグローバル市民性について

大阪教育大学池田地区において、グローバル市民性とは、「多様性社会の中で協働する力」「自律的に行動する力」「実社会に生きる知識・技能」という大きな3つの軸から成り立つものと仮定義している。

実社会の中で数学は確実に必要なものであるが、日常生活を送る中ではその存在を実感することは難しい。指数関数・対数関数は地震の「マグニチュード」や音の大きさを表す単位「デシベル」などで使用されている。また、大航海時代の航路決定にも対数が使用されるなど、これらは昔から使用されている大切な知識・技能である。

ことを本授業では伝えていきたい。数学の必要性・よさを再確認し、学習している数学が「実社会に生きる知識・技能」であることを理解してもらいたい。

(4) 展開

学習過程	学習活動および内容	指導上の留意点	評価の観点・方法
導入 5分	球面三角法の余弦定理を知り、その計算の一部の具体例として $\sin 39^\circ \times \sin 19^\circ$ を計算する。	<ul style="list-style-type: none"> ・大航海時代に用いられた計算方法であることを伝え、数学史に触れる。 ・生徒に三角比の表を配る。 ・計算方法としてまず $\sin 39^\circ = 0.6293$, $\sin 19^\circ = 0.3256$ であるから 0.6293×0.3256 をそのまま計算する方法が生徒から出てくるが、2つの sin の積なので和と積の公式を用いる方法を生徒に思い出させる。 ・複数の三角比の積になった場合、一度の計算では終わらないことを生徒に認識させる。 	(ア)② (イ)④ ワークシート

<p>展開</p> <p>40分</p>	<p>32×64を計算する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 生徒の計算が終わった後に2の冪乗を利用して解いた生徒がいるかどうかを確認する。 2の冪乗の対応表を表示し、それを利用すれば実際に計算すべきものは指数部分($5+6=11$)のみでよいことを説明する。 10の冪乗の対応表である常用対数表を生徒に配る。 	<p>(ア)②③</p> <p>ワークシート</p>
	<p>常用対数表の使い方を確認する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 常用対数表の使い方を理解しているかどうかを数名の生徒を指名して常用対数の値を答えさせる。 	<p>(ア)①</p> <p>ワークシート</p>
	<p>常用対数表を利用して 0.6293×0.3256 を計算する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 教員が $0.6293 \times 0.3256 = 6.293 \times 3.256 \times 10^{-2}$ とし、$x = 6.293 \times 3.256$ とおき、両辺の底を10とした対数をとる。その後は生徒のみで答えまで導かせる。 	<p>(ア)①②③</p> <p>ワークシート</p>
	<p>2^{29}の概数を求める。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 概数を29倍したことで実際の値とズレが生じることに気が付かせる。 桁数や最高位の数を知るだけならば概数を求めるだけでよいことを伝える。 	<p>(ア)①②③</p> <p>ワークシート</p>
	<p>南海トラフ地震 M9.0 は大阪府北部地震 M6.1 の何倍のエネルギー量なのか比較する。</p>	<ul style="list-style-type: none"> マグニチュードが少し違うだけでも実際は大きなエネルギー差があることを認識し、地震の安全に対する意識を持たせる。 	<p>(ア)①②③ (イ)④</p> <p>ワークシート</p>
<p>まとめ</p> <p>5分</p>	<p>本時のまとめを教員が行う。</p>		

(5) 準備物

常用対数表, 三角比の表, 授業プリント, 授業スライド, 教員用 PC, HDMI ケーブル

7. 参考文献

ニュートンプレス(2019)『Newton ライト2.0 あなたも知らずに使っている!対数』

堀部和経(2018)『球面三角形の定理 高校生に向けて』

<http://horibe.jp/PDFBOX/SphericalTriangles.pdf>

花木良(2013)『指数・対数の価値を伝える教材研究』

https://www.jstage.jst.go.jp/article/jjsme/95/RS/95_273/_pdf/-char/ja

文部科学省(2018)『高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説 数学編 理数編』

https://www.mext.go.jp/content/20230217-mxt_kyoiku02-100002620_05.pdf

国立教育政策研究所(2021)『「指導と評価の一体化」のための学習評価に関する参考資料 高等学校 数学』

https://www.nier.go.jp/kaihatsu/pdf/hyouka/r030820_hig_suugaku.pdf