算数・数学の授業を通して得られる4つの力の育成
ー幾何領域において「見える」4つの力ー

数学科　砂田謙佑・谷直樹・中西遼

1．主題設定の理由

（1）テーマ設定の理由・背景

算数・数学部では12年間を通して，算数・数学で学習したことや習得した方法を用いて，新たな課題や現実社会において直面した問題を，自らの力で解決しようとする態度を育成することが大切であると考えた。

算数・数学における「知」を4つの力（数学的な思考力・数学的な表現力・数学的な判断力・数学的な活用力）と考え（下表参照）昨年度は，各校種において授業展開に取り入れ，その育成において有効かどうかを検証した。

4つの力
（池田キャンパス小中高　算数・数学部）

数学的な思考力	一人ひとりが課題解決の方法について，根拠や理由を明確にし，筋道立てて考える力
数学的な表現力	言葉や数，式，図，表，グラフなどを用いて自らの考えを表す力
数学的な判断力	論理的に考えることによって，事象や性質を正しく認識し，解釈し，見極める力
数学的な活用力	生活場面・学習場面（他教科やこれから先の算数・数学）において，既習内容をもちいて，問題を解決する力

一つの領域（統計分野）において授業展開を行ったことにより，校種間の系統性・連続性を見ることができ，有効であった。今年度は，それらの4つの力に対する評価の観点を明らかにするとともに，それらの力が表出され，児童・生徒が4つの力を獲得することにつながるような授業展開を研究する。

（2）算数・数学の「知」をはかるには

小中高の各校種で幾何領域において研究を進めていく。具体的には4つの力を獲得するために次の3つを研究する。①小中高それぞれでどのような評価をしていくのか　②評価をどの程度までそろえることができるのか　③授業のどの展開部分で評価をするのか。以上3つを明らかにしていく。

今年度行う幾何領域に関して,「知」の認識・「知」構造化・「知」の活用を以下のように考えた。

「知」の認識	・事象を認識し，課題を発見する。
「知」の構造化	・既習事項を用いて，さまざまなことに関連付けて考えたり，判断したり，表現することで，新たな学びを作り出す。
「知」の活用	・課題に対して結論を出す。 ・その結論や考え方を活用し，新たな事象や問題に取り組む。

4つの力を獲得するための授業展開が昨年度提案した「知」の認識・「知」の構造化・「知」の活用の3段階である。その3段階においてルーブリックをたて評価することは4つの力の評価に結びつくものということができる。

「知」を鍛える授業展開３つの視点において目指す児童・生徒の姿

「知」	「知」の認識	「知」の構造化	「知」の活用
思考力・表現力・判断力 活用力	課題発見	情報選択・思考・判断・処理・比較・整理	課題に対する結論 新たな問題に取り組む
小学校	図形に対して，自ら働きかけ課題を認識し，知る。	既習事項を用いて，論理的に思考・表現し，そのよさを認識する。	生活場面で置き換えて考えたり，活用したり，新たな課題に対して取り組む。
中学校	日常生活の事象の中で数学が使用されている事象に触れ，知る。	既習事項を用いて数学的に表現する。	他の事象での活用の展望を持つ。
高等学校	与えられた幾何学的対象の性質を認識し，4つの力を獲得しようとする。	与えられた幾何学的対象にある性質を計量や解析に関連付けながらまとめることができる。	さまざまな事象に対して，幾何学的対象や概念を当てはめることで，可視化したり特質を見出したりする等の活用ができる。
具体的な評価方法	発言・態度・ワークシート・ノートなど		

（３）小中高算数 10（12）年間の階層性・系統性・連続性

算数・数学科における幾何領域の指導の意義には次の２つが考えられる。

① 図形に対する豊かな感覚の育成

② 幾何領域においての論理的な思考力の育成

学習指導要領における小学校から高等学校までの幾何領域の指導では，その重点課題が上記の①から②に変化していく。例えば，小学校から中学校第１学年の学習では児童生徒が図形そのもの（辺の長さ，角の大きさなど）を中心に学習している。それに伴い，中学校第１学年からは「論理的に考察し，表現する能力を養う。」(中学校)，「図形の性質を論理的に考察し表現する能力を育成する。」(高等学校数学A）とあるように，図形に対して主体的に働きかけ，論理的に思考する学習展開が望まれている。小学校で体験的に理解したことに対する根拠を明確に立証し，論証していくように，12 年間の幾何領域の学習においては，具体的場面から数学的事象を発見し，その性質を論理的に導き出すことが重要なのである。

（４）焦点をあてて

幾何領域の学習において，操作活動の場面では関心・意欲・態度を評価する機会が多い。しかし，その後は図形に対し，自ら働きかけ，考察を深めていく活動を行わせ，数学的な見方や思考を重視した指導と評価を行うことで，４つの力の可視化を図る。

小学校では，立方体の展開図を考える上で、組み立てた時の重なり合う辺を考えていくと，１つの展開図から幾通りの展開図を作ることができる。この活動を通して、図形に対する見方を豊かにすることがねらいである。組み立てなくても、立方体の展開図かどうかを弁別できるようにさせる。

中学校では，証明の必要性を理解させるために，既習事項を用いて演繹的に考えさせる。最短の距離を導く過程での評価指標を作成し、それをもとに４つの力の可視化を図る。

高等学校では，「条件を満たす点の動く範囲」の授業を行う。ベクトルの１次結合 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で与えられる点Pが表す図形について，「学び合い」「教え合い」，そしてICTの活用で，授業を展開

2. 本年度の取り組み

実践事例１

(1)　授業のねらいと題材設定の理由

今まで生徒たちは,「３章２次方程式」といったように，今どの範囲の学習をしているかをわかった上で授業をうけ，課題に取り組んできた。そのため，はじめから「この問題は２次方程式を使うのであろう」と考え，それを用いてといていく。しかし，本来は目の前に与えられた課題に対して，既習事項の何が使えるかを自ら考え，自ら選択する力が必要とされる。この必要に応じて，既習事項から取捨選択し利用していくことは，「生きる力」につながると考えられる。

そこで，今回のテーマとして「最短の距離」をとりあげた。「最短の距離」と聞けば「点と点」「点と直線」「直線と直線」のように既習事項があげられる。さらに，それを考える上において「直線」「垂直」といったキーワードがでてくる。この課題に何が使えるか，適切に判断し，またそれを利用し課題を解決する力を養いたい。

証明の必要性の理解において，演繹的に導く必要性がある。本時では，既習事項である「正三角形の性質」を使い，それが最短の距離になるということに気づく生徒がいると思われる。また，気づかない生徒も他の生徒の考えを聞き，それが最短であるということを理解することができると思われる。それで本当に十分なのかということを考える中で，演繹的に考えるための「任意の点」を設定する必要があるということに気づき，それを用いて示したときにこそ，その必要性を感じられるものだと思う。

(2)　目標

・三平方の定理や円周角の定理を見いだし理解し，その証明ができることを知る。
・三平方の定理の逆，円周角の定理の逆がそれぞれ成り立つことを理解する。
・三平方の定理や円についての定理を具体的な場面で活用することができる。
・既習事項の図形の基本性質や定理などを使って，図形の性質を考察したり証明したりすることができる。

(3)　授業の実際

①目標

○既習事項を用いて，３直線が１点で交わることを示すことができる。(数学的な見方や考え方)

○３地点までの距離の和が最短となる点について，なぜ最短になるかを，根拠を明らかにし，筋道立てて説明することができる。(数学的な見方や考え方)

②展開

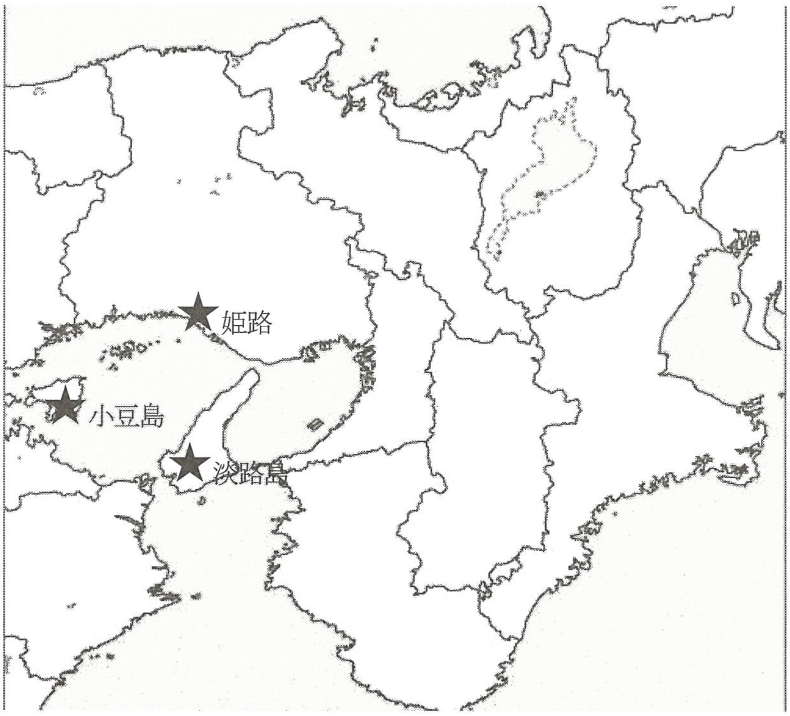
<table>
<tr><th>学習過程</th><th>学習活動および内容</th><th>指導上の留意点</th><th>評価の観点</th></tr>
<tr><td>導入</td><td>○「最短の距離」について確認する。
○課題を知る。</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">【課題】「姫路，小豆島，淡路島を行き来できるような右上の図のような橋を作ろうと思います。できるだけ橋の長さを短くつくるにはどのようにつくればよいか考えましょう。」という問に対してOくんは次のように考えました。
【Oくん予想】3点が各辺上にあるような正三角形をかく。各辺の3点から各辺に対しての垂線をひく。</td></tr>
<tr><td>展開1</td><td>○Oくんの考えた図をかいてみる。
○Oくんの考えた図に対して疑問点がないかを考える。
・そもそも垂線が1点で交わるのか？
・どのようにしたらそのような正三角形がかけるのか？
○疑問に対して個人で考える。

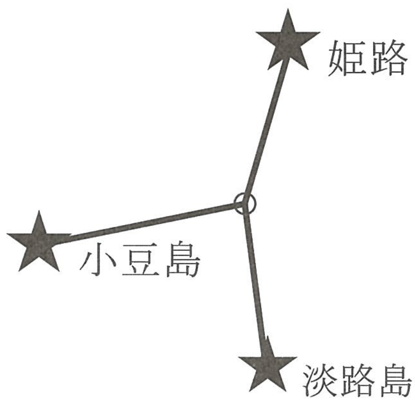
○全体で交流する。
○実際に1点で交わる点があることを知る。
また，その点が120°ずつに，分ける点であることを知る。</td><td>・作図の方法は現段階ではわからないので，フリーハンドでかくように指導する。
・作図に関しては，今は考えず1点に交わるかどうかに着目する。
・個人で考えたのち，考えが止まってしま
ったり，聞きたいところがあれば相談してもいいことを伝える。
・はじめから正三角形をかくことができないので，三角形の内部の点から各頂点を結んだ線分に対しての垂線をひき，その3本の垂線が作る図形が正三角形になればよいことに着目させる。
・正三角形になるということは，何が言えたらいいのかを考えさせる。
→定義「3辺が等しい三角形」
→性質「3つの角は等しい」</td><td>・既習事項を用いて，3直線が1点で交わることを示すことができる。(数学的な見方や考え方)</td></tr>
</table>

展開2	○課題を知る。		
	【課題】なぜ最短になるのか？		
	○個人で考える。 ・説明をワークシートに記入する。 ○全体で交流する。	・個人で考えたのち，考えが止まってしまったり，聞きたいところがあれば相談してもいいことを伝える。 ・既習事項の「正三角形の定理㊟」に気づく生徒はいると思うが，それだけで十分なのかを問う。 ・最短であることを示すためには任意の点と比較することが必要であることを気づかせる。	・既習事項を基に，最短となる点を根拠を明らかにし，筋道を立てて説明することができているか。（見方考え方）
まとめ	○本時のふりかえりをする。 ○次回は今日の授業の図の作図を考える。	 ・疑問点に戻り，実際にどのように作図すればよいかということに関心を持たせる。	

㊟正三角形の内部の点から3辺までの距離の和は一定である

☆掲示物☆





☆授業後のアンケート用紙及び集計結果☆

【アンケート用紙】

数学【3地点を結ぶ最短の距離】

☆アンケート☆

①「3直線が1点で交わるかどうか？」について

A.自ら考え理解することができた

1. あてはまる　2. ややあてはまる　3. ややあてはまらない　4. あてはまらない

B.Aで、3、4と答えた人で、友達の考えを聞き理解することができた

1. あてはまる　2. ややあてはまる　3. ややあてはまらない　4. あてはまらない

C.問題の難易度として難しかった

1. あてはまる　2　ややあてはまる　3. ややあてはまらない　4. あてはまらない

②「なぜ最短になるのか？」について

A.自ら考え理解することができた

1. あてはまる　2. ややあてはまる　3. ややあてはまらない　4. あてはまらない

B.Aで、3、4と答えた人で、友達の考えを聞き理解することができた

1. あてはまる　2. ややあてはまる　3. ややあてはまらない　4. あてはまらない

C.問題の難易度として難しかった

1. あてはまる　2. ややあてはまる　3. ややあてはまらない　4. あてはまらない

③今回の問題において、

A.「任意の点」の必要性を感じることができた

1. あてはまる　2. ややあてはまる　3. ややあてはまらない　4. あてはまらない

B.こういった今まで習ったことのどれを使うかを自ら考える問題をとくことは、
「いきる力」として役立つと思う

1. あてはまる　2. ややあてはまる　3. ややあてはまらない　4. あてはまらない

C. Bで1、2と答えた人の中で理由がかける場合は書いてください。

3年（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

①	A		B		C	
②	A		B		C	
③	A		B			
	C					

【集計結果】

		1	2	3	4
①	A	12	7	17	2
①	B	15	3	1	0
①	C	19	17	1	1
②	A	12	8	15	3
②	B	13	4	1	0
②	C	20	15	2	1
③	A	23	13	1	1
③	B	11	20	5	2

【アンケートデータ】

		①			②			③			ワークシートの評価	
番号	点	A	B	C	A	B	C	A	B	C	課題①	課題②
1	30	1		2	1		2	1	2	社会の中であふれている情報の取捨選択とにているから	B	A
2	29	3	1	1	3	1	1	1	1		B	A
3	36	3	1	1	3	1	1	1	2	今までのを工夫して組み合わせる力がついた	B	A
4	19	4	1	1	4	2	1	2	2	1つのことだけにとらわれず、いろいろなことを考えるので、自分で頑張るので生きる力となる	B	A
5	26	3	1	1	1		1	1	2	難題にぶつかったとき、照準をあてて自分の知識を自分であきらめずに考えること、仲間と共有することは大切だと思ったから	B	B
6	28	2		2	3	2	1	1	2		C	A
7	23	3	1	1	2		1	1	2	建設業などで必要になりそう	A	A
8	15	4	3	1	1		4	2	2	将来、何かを選択する時に今までの知識を使うことも有ると思うから、そういう時に役立つと思うから	B	A
9	13	1		2	1		3	1	1	授業の復習にもつながるので、これまで習ったことをいかに理解できているのかがわかるから	C	A
10	24	3	1	1	4	1	1	1	1	自分で仮定して、物事を色々な方向で見ることができるから	A	B
11	21	1		2	1		2	1	4		C	C
12	25	1		2	1		3	2	1	協力などして楽しめたから	A	A
13	34	1		2	3	1	2	2	2	最短距離を求めたりする活動はどこかで多視点的にものごとをみつめることにつながり、役立つと思う。	B	B
14	31	1		1	1		1	2	3		B	C
15	25	3	1	2	3	1	1	2	2	どの教科に関しても、習ったことを色々活用することはこれから生活していく上で必ず必要になると思うから	B	A
16	34	1		2	1		2	1	1	問題を解く上、必ず昔学んだことを考え直すから	A	A
17	9	2		3	3	1	1	3	4		B	A
18	37	3	1	2	3	1	2	2	2		B	A
19	27	1		4	4	3	1	4	3		C	B
20	22	2		1	2		1	1	3		A	A
21	26	1		1	3	1	2	1	1	社会に出たときには、今回の問いのように正しい解法というものがないため、自分で習った知識をフル活用して解法を見つけるしかないから	B	A
22	17	3	2	2	3	2	2	1	2	問題解決能力が身に着く	C	C
23	30	3	1	1	3	1	1	2	2	社会にでてからも、自分で解決策とかをさがすときに役立つと思うから	B	A
25	31	3	1	1	2		1	1	1	使える事柄を、どこでどうやって使うのか、考えることによって応用力がみがかれるとおもうから	B	A
26	22	3	1	1	3	1	1	1	2	全然違う分野同士でも役立つことがあったりするから	A	A
27	29	2		2	2		1	1	2	大切なところでの判断をできる	B	C
28	5	3	1	1	3	2	1	2	3		C	A
29	28	1		2	1		2	1	1	情報社会において知識を増やすだけでは優秀な人材になれない。知識をきちんと活用できる人が今の社会には求められているのだ。	C	B
31	26	3	2	1	1		2	2	2	人生の中で、経験から選んで活用することは必要になっていると思うから	C	A
32	39	1		2	1		2	2	2	今までの経験から必要なことを探しだしてかつようすることはこれからも多いと思うから	B	B
33	28	2		1	2		1	1	2	自分で考え、答えを導き出すということは数学のみならず様々な場面で活用されると思うから。	A	A
34	26	3	2	1	2		1	2	2		C	C
35	12	3	1	2	3	1	2	1	2	良い大学に行く、良い職業につくことは生きていくうえで大切なことだと思うから。	B	A
36	24	2		1	3	1	1	1	1	応用力になるから	C	A
37	31	1		2	1		2	1	3		B	A
38	23	3	1	2	3	1	2	1	1	知識を活用する力は大事になると思う。	B	A
39	28	2		2	2		2	1	1	様々な角度から考えるためには知識だけでなく応用力も必要であり、それらを活用して場合分けしていくため、その力は生きていくうえで必要だと思う。	A	A
40	21	3	1	1	2		2	2	2	自ら考えて、問題の解決策をみつけることは大切だと思うから	B	A

☆生徒のワークシート☆

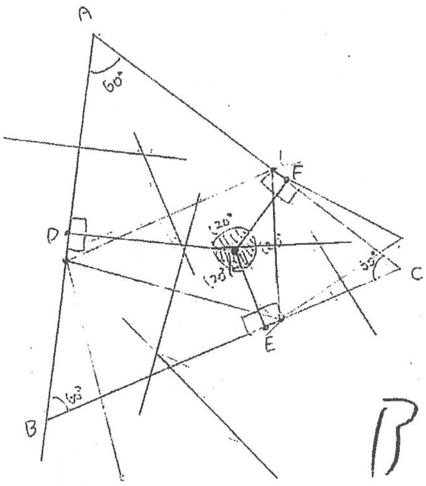
【3地点を結ぶ最短の距離】② [redacted]

【疑問点】

3点が1点で交わるの？

なぜ最短になるの？

【3本の垂線が1点で交わるのか？】



B

△ABCは正三角形なので、∠CAB＝∠ABC＝∠BCA＝60°

各辺を底辺とした点Pから垂線をひく。

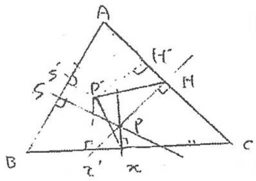
四角形ADPFをみたときに、∠DPF＝360−∠PDA−∠DAF−∠PFA

となり、∠DPF＝120°となる。四角形DBEP・EPFCも同様。

よって、3本の垂線が1点で交わる。

【なぜ最短になるのか？】

④



正三角形ABCの中に任意の点P'を取るとして、

P'から3辺にそれぞれ垂線をひき、そのそれぞれの交点をS'、x'、H'とする。

直線と点はきょりが1番最短になるので

P'S'＜P'S、P'x'＜P'x、P'H'＜P'H

ということは P'S'＋P'x'＋P'H'＜P'S＋P'x＋P'H ①

正三角形の内部の点から3辺までのきょりは一定なので

P'S'＋P'x'＋P'H'＝PS＋Px＋PH …②

また、きょりが最短となるときなので ② は最短となる

A

【3地点を結ぶ最短の距離】② [redacted]

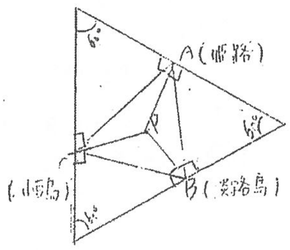
【疑問点】

3本の垂線が1点で交わるのか？

どうやって3点を通る正三角形をかくのか？

「なぜ最短になるのか？

【なぜ3本の垂線が1点で交わるのか】



3点A,B,Cを通る三角形は正三角形なので

それぞれの角は60°になる。

PからA,B,Cそれぞれに垂線をひいたから、

垂線と三角形の辺の間の角はすべて90°になる。

四角形の内角の和は360°なので

360°−60°−90°−90°＝120°となり、

もう1つの角は120°だと分かる。

どの四角形でも同じなので、中心の角度は

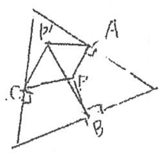
120°×3＝360° となり 3本の垂線が1点で

交わることが分かる。

B

【なぜ最短になるのか？】

⑧



点Pから、点A、点B、点Cにそれぞれひいた線は垂線なので

それぞれの長さは、点Pと辺の距離になるのでそれぞれの垂線は最短である。三角形内に、任意の点P'をとったとき、

AP＜AP'，BP＜BP'，CP＜CP' より、

AP＋BP＋CP＜AP'＋BP'＋CP' になるので、

点Pは最短になる

A

 [redacted])

【疑問点】

3本の垂線が1点で交わるのか？
…3点を通る正三角形…
…のか

【なぜ最短になるのか？】

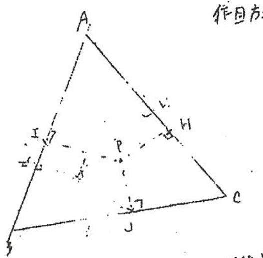
16

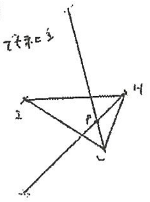
正三角形の内部から3辺までの距離の和が
三角形の高さと等しいので　（等積変形より）
△ABCの高さをhとすると
PI + PJ + PH = h …①
△ABCにP以外の任意の点P'をとる
P'から各辺に下ろした垂線の足をそれぞれ
H', I', J'とする
このとき①と同様にし
P'H' + P'I' + P'J' = h …②
また点と直線の距離の性質より
P'H' ≦ P'H　P'I' ≦ P'I　P'J' ≦ P'J　（等号成立 H'H, I'I, J'J が一致する時）
よって
P'H + P'I + P'J ≧ P'H' + P'I' + P'J' …③
①②③より
P'H + P'I + P'J ≧ PI + PJ + PH
つまり点P以外の点P'をとっても
それはH, I, Jからの最短ではなくなる
よって
(PI + PJ + PH) が最短となる

A

【　3本の垂線が1点で交わるのか　】

作図方法で示す





3本の垂線が1点で交わり ∠IPH = ∠HPJ = ∠IPJ = 120°
と仮定する。このとき△ABCが正三角形でなかったとする。
PI, PJ, PH に垂直な線を引き交点を A, B, C
とする。この時、
四角形の内角の和は360°なので
∠AIP + ∠IPH + ∠PHA + ∠IAH = 360
⇔∠IAH = 60° 同様にし ∠IBJ = ∠HCJ = 60°
よって△ABCにおいて3つの内角が等しい
△ABCは正三角形
よって仮定は正しくない

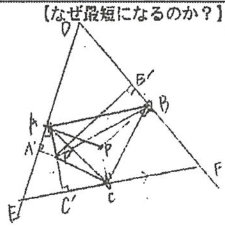
A

 [redacted])

【疑問点】

3本の垂線が1点で交わるのか？
どうやって3点が通る正三角形をかくのか

【なぜ最短になるのか？】

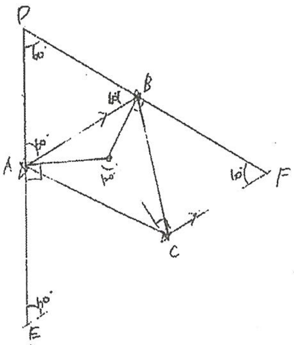


17

任意の点P'をとる。
点P'からそれぞれの辺に垂線を引き、その交点をA', B'
正三角形の性質より
正三角形の内部の点から3辺までの
距離の和は等しいので
AP + BP + CP = A'P' + B'P' + C'P' …①
A'P' + B'P' + C'P' ≦ AP' + BP' + CP' …②
①, ②より
AP + BP + CP ≦ AP' + BP' + CP'
よって、点Pから点A, B, Cまでの
距離の和は最短となる。

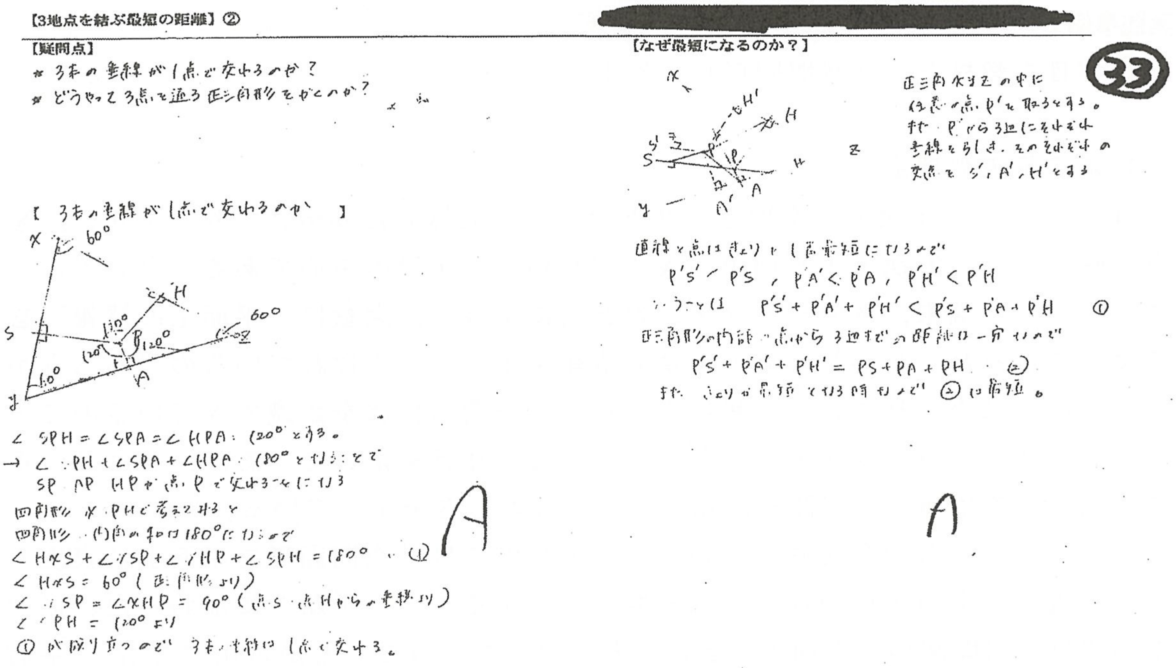
A

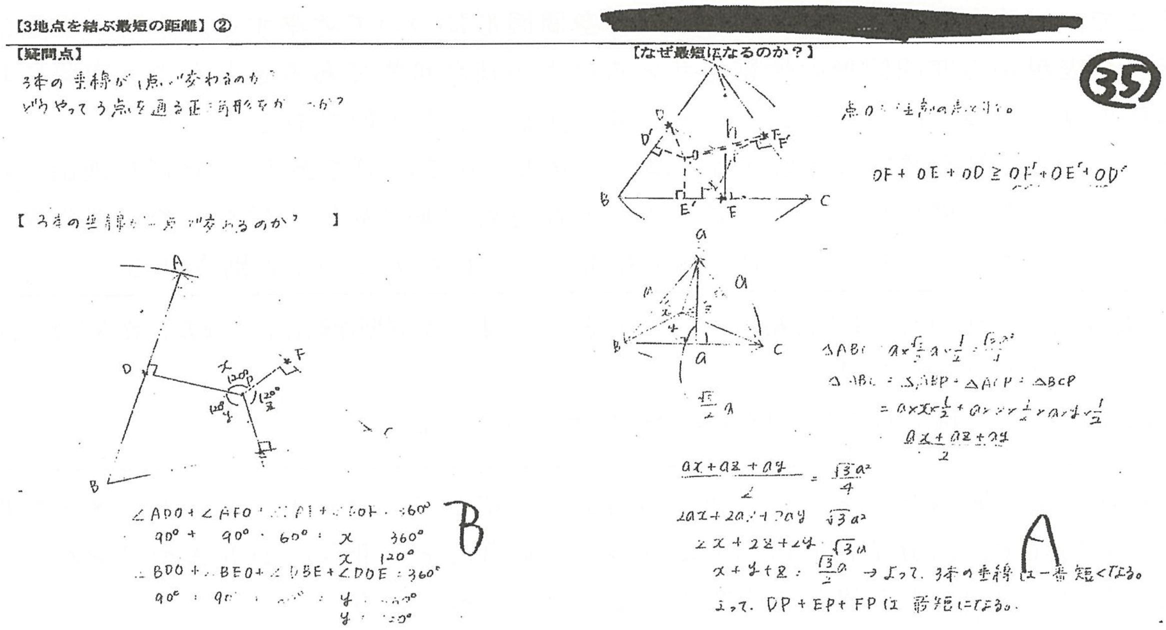
【 3本の垂線が1点で交わるのか？ 】



小豆島、姫路、淡路島をそれぞれA, B, Cとする
辺ABが1辺である正三角形を図のように作図する
点Cを通る直線ABに平行な直線を作図する
△DABは正三角形より ∠DAB = ∠DBA = ∠ADB = 60°
AB // EFより ∠DAB = ∠DEF = 60°（同位角）
∠DBA = ∠DFE = 60°（同位角）
∴△DEFは正三角形である（∠DEF = ∠DFE = ∠ADF = 60°）
それぞれの点から辺に対して垂線を作図をし、交わった点が

B





(4) 実践の成果と課題（分析結果について）

今回の授業では「評価」について、研究を行いました。その中でも現状行われている定期考査での結果と，授業内でのワークシートの評価の関係について分析しました。アンケートデータの左から二列目には定期考査の結果，①②③はアンケート結果，右二列はワークシートの評価をのせています。結果としては，考査結果が高得点だからといって，ワークシートの内容の評価が必ずしも高いとはいえず，反対のこともいえました。このことから，現状の考査の内容では普段の授業での取り組みを確認するには不十分であると考え，大学入試のあり方が大きく変わろうとしている昨今，考査の内容についても研究する必要があると感じられました。それとともに授業内での評価の大切さも実感することとなりました。

しかし，まだまだ結果を立証するには事例が少ないので，今後も引き続き授業内評価と考査結果の関連を分析する必要があると感じられました。

実践事例2

「結び目を教材とした空間図形」１年生

（１）単元設定の理由

人は目に見える３次元・空間を，様々な方法で記録したり伝えたりしてきた。絵画や写真，映像など，２次元・平面上に表す方法がその手段の中心である。今日ではパソコンやタブレット端末，スマートフォンの普及によって，大量に“平面上の情報”を得られるようになった。しかし，その大量の情報を正しく読み取れているのであろうか。つまり，平面上に表されている情報から，正しく空間の情報を認識できているのであろうか。近年，錯視やトリックアートといった分野が注目を浴びているが，これは，平面上に表されている情報から空間を認識することの難しさを示している。

現行の中学校学習指導要領において，図形分野では「空間図形を平面上に表現して平面上の表現から空間図形の性質を読み取ったりすること」が新たに加わった。旧学習指導要領では「空間図形を平面上に表現すること」であったことから比べても，「平面上の表現から空間図形の性質を読み取る」ことの重要性と必要性がわかる。

そこで，本時は平面上に表された単純な空間図形について考察する。本時の課題は，平面上の表現から空間図形の性質を考える思考訓練が可能であるとともに，空間における図形の見方が多角的であることを再認識させることも可能である。

また，本時で扱う題材は「結び目理論」の導入となる図形である。「結び目理論」は位相幾何学の学問分野に属し，他の数学の色々な分野や量子統計力学などの数理物理とも関連して研究されている。結び目理論の研究の目的は次の二つに大別される。

同型問題：	2 つの結び目（または絡み目）があるとき，それらが同型な結び目（または絡み目）であるかどうかを判定せよ。
分類問題：	すべての結び目や絡み目を同型なものを除いて並べよ。

さらに，電子顕微鏡などの科学技術の発展と呼応して，今日ではソフトマター物理研究などの物理学，高分子合成研究やポリマーの研究などの化学，ＤＮＡやタンパク質の研究などの生物学とも関連して研究されるようになっている。

また，ユークリッド幾何では長さや角度が保たれるため，複雑な立体図形を表現することはむずかしいが，結び目の場合は複雑になっても交点数が増えるだけで表現できる。したがって，空間図形を容易に描きながら，３次元空間の位置関係をイメージし，奥深い結び目の数学の探求活動をすすめることができる教材であると考える。

生徒たちは小学校第２学年の「箱の形の構成要素」から順に，緩やかに空間図形について学習をしている。中学校第１学年では，具体物の観察や操作活動を通して視覚的・直観的に立体の特徴を理解してきた。

本時に関わる内容としては，思考実験や具体物の操作活動から，空間図形における直線と直線，直線と平面，平面と平面の位置関係について，平行，ねじれ，垂直を中心として学習し，空間図形についての理解と知識を深めてきた。さらに，空間図形を平面上に表す手段として，小学校で学習した見取り図，展開図を発展させたり，新たに投影図を導入したりしながら学習を進めてきた。

ノートやレポートの記述等から，生徒たちは平面上の表現から空間図形の性質を読み取ったりできるようになっていると思われる。そこで，本校の第 1～3 学年全員（480 名）に＜資料１＞のような調査を行い，どの程度読み取ることができるのかを確かめた。
調査の内容は，一見，立方体のように見える図の中から，立方体の形になるもの（○）とならないもの（×）に分ける作業である。①，④，⑦については手前の面と奥の面を作るはずの辺が交差しており，立方体とはならない。残りの②，③，⑤，⑥は立方体を様々な視点から見た図である。

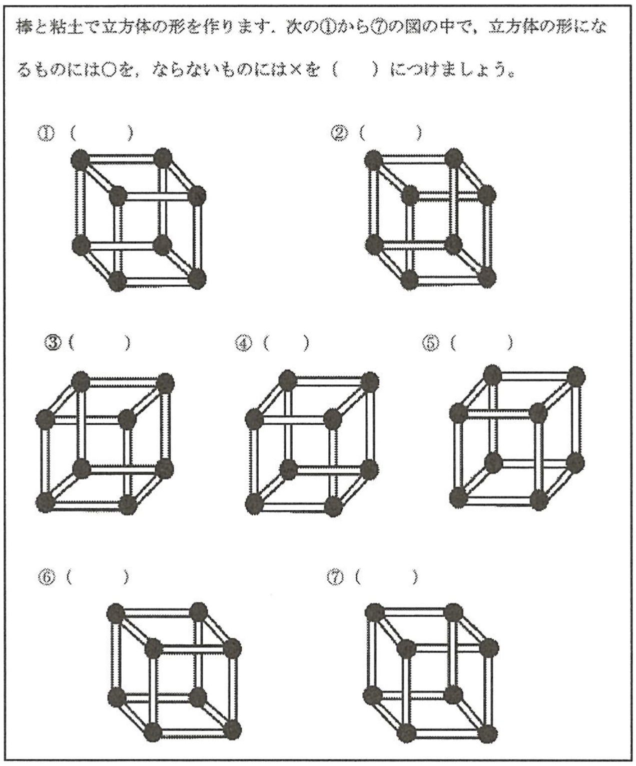
すると＜資料２＞の結果を得た。立方体の形にならない①，④，⑦は 90%以上の生徒が読み取れている。次に，立方体に見える⑤，⑥ではほぼ 100%の正答率である。しかし，同じく立方体に見えるはずの②，③は全学年で正答率が下がっている。これは，教科書や問題集等で目にする立方体（または直方体）のほぼ全てが⑤，⑥の形で表されていることに起因しているものと思われる。つまり，「図を読み取って判断している」というよりも，「見慣れた形であるかどうかで判断している」生徒が一定数いることを示している。

この調査から，平面上の表現から空間図形の位置関係を読み取り 3 次元にある空間図形をイメージしようとし，できるようになるための思考訓練が必要であることがわかる。

本単元の学習を進める上で，構成要素に着目した立体模型の観察や，実際に組み立てるなど，目的を明確にした具体的な操作活動を重視してきた。ここでの操作活動とは，単純な手だけの操作ではなく，思考実験など生徒の主体的な追求活動を伴うものであることに留意したい。例えば，基本的な柱体やすい体においては立体模型を実際に手に取らせながら定義を導き出させたり，立体の平面上での表し方について多面的・多角的な方法で表現できることを確認させたりしてきた。また，正多面体においては，模型と正多角形のチップを用いながら，なぜ 5 種類しか存在しないといえるかを追求させた。

本時においても，目的を明確にした活動を伴う授業を展開させ，空間図形に対する認識力を高めていきたい。まず，課題①で思考実験を行い，題材について興味を持たせる。この課題は一見すると交差が逆転するように思えるが，事実としては交差が保存される，という点が特徴である。そして次の課題②では課題①の思考過程を受けて，交差が逆転する場合の有無について考える。課題②の思考実験と具体物操作の結果から，生徒たちに，この図形が“ねじれの位置”にあるような空間的な広がりを持っていることに気づかせたい。また，実際には図２は図１の鏡像にもみえる。課題②で作った図形と，図１の鏡像とは違うのか。これについての考察は本時では扱えないが，さらに考察する価値がある。

＜資料１＞



＜資料２＞

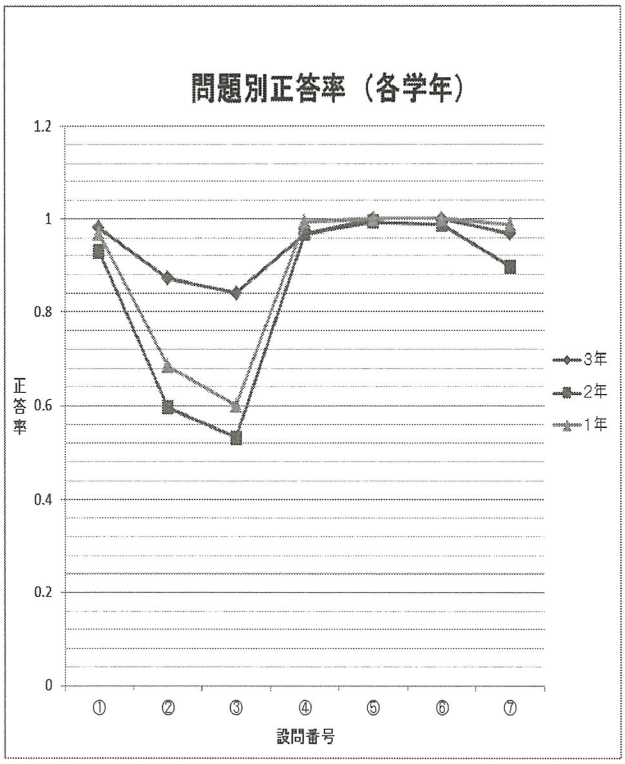


図１

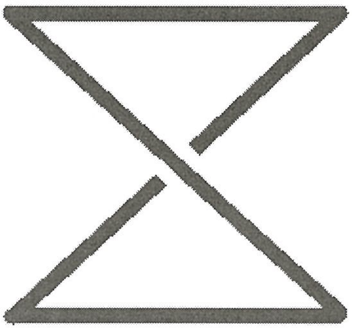
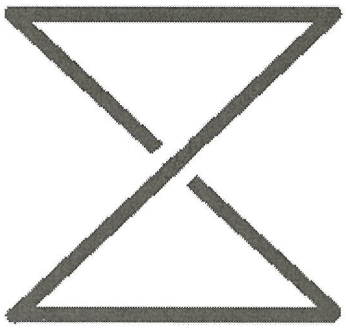


図２



（２）授業の実際

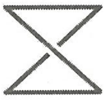
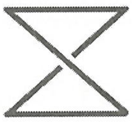
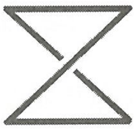
・空間図形の移動・変形を念頭操作できる。【見方や考え方①】

・念頭・具体物操作について，図表現を用いて説明できる。【見方や考え方②】

本実践の評価基準表

本時 発展的な課題①	「おおむね満足できる」状況（B）と判断される状況	「十分満足できる」状況（A）と判断される視点
【見方や考え方①】 空間図形の移動・変形を念頭操作できる。	課題①の正しい向きを判断できる。	（B）に加え，考え方を説明できる。
【見方や考え方②】 念頭・具体物操作について，図表現を用いて説明できる。	課題②について，図表現や文章を用いて説明できる。	課題②について，効果的な複数の図表現や文章を用いて説明できる。

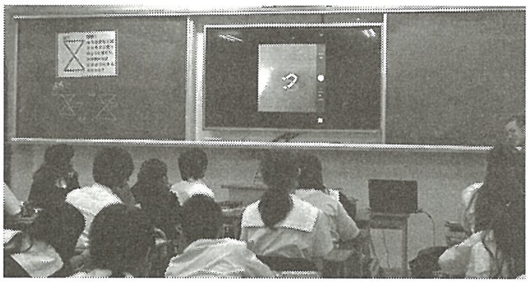
本実践の展開

	学習活動および内容	指導上の留意点	評価
導入	1．課題①を把握し，取り組む。 ＜課題①＞ ある図形を正面から見ると図1のように見えた。 反対側からはどのように見えるだろう？ 図1  ・個人思考で念頭操作⇒集団思考で取り組む。 ・考えを図や文章でまとめる。	○課題①を提示する。 ・まず，瞬間的に考えた向きをかかせる。 ・どのように考えたか意見を集約する。 ・生徒どうし話し合わせる。 ・電子黒板で演示する。 ・考えをまとめさせる。	【見方や考え方①】
展開	2．課題②を把握し，取り組む。 ＜課題②＞ 正面から見ると図1のように見える図形が， 図2のように見えることはあるだろうか？ 図1  図2  ・個人思考で念頭操作⇒4人班で具体物操作の流れで取り組む。 ・モールで模型つくり，操作しながら考える。 ・図1の見方に気づく。	○課題②を提示する ・個人思考で念頭操作⇒4人班で具体物操作の流れで取り組ませる。 ・モールを配布し，具体物操作をさせる。 ・4人班になりモールを使って模型をつくらせる。 ・図1について，平面的にとらえていることに注目させる。	
まとめ	3．課題②をまとめる。 ・どのような図形を，どのように動かせばよいのか，について図表現を用いながら説明する。	○考えをまとめさせる。 ・図2のように見えることを，図表現や文章によって説明させる。	【見方や考え方②】

引用文献
河内・柳本編著「結び目の数学教育」への導入—小学生・中学生・高校生を対象として

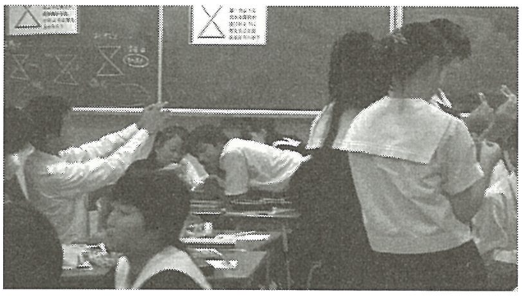
授業の様子と評価

1．授業の様子

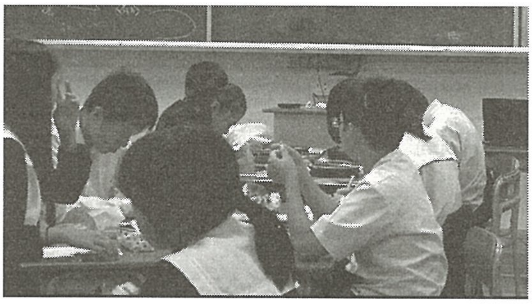


【写真①】電子黒板で課題①を確認する。実物を見ることで，考えがより具体的になり，実感を持つことができる。

【写真②】課題②について，モールを操作しながら４人班で取り組む。図１，２を空間的にとらえることが難しい。



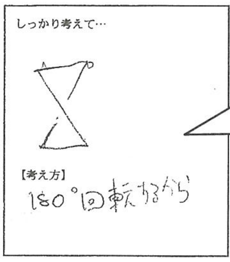
【写真③】　課題②の考えを交流する。考え方のわかった班が，まだわかっていない班に教えている姿が見られる。どの班も主体的に活動を進めている。



【写真④】課題②のまとめをする。どのような図形を，どのように動かせばよいのかについて図表現を用いなが説明するために，何度もモールを操作しながら完成させていく。

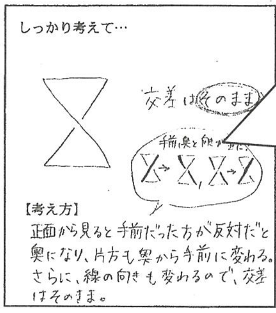
☆評価について（ワークシート）☆

課題①



図がかかれているだけで，考え方がほぼ記入されていない。

評価：B



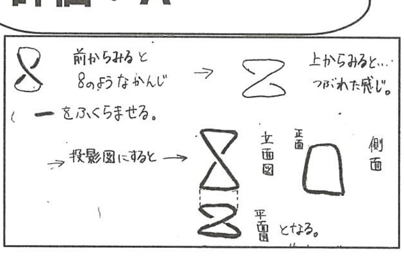
図と文章が一体となっており，考え方がしっかりとまとめられている。

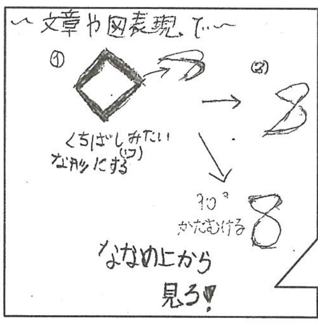
評価：A

課題②

投影図を用いて多面的に説明している。

評価：A





視点を変えた複数の図で説明がされており，どのような図形なのかがわかりやすいが，“ななめ上”ではない。

評価：A$^-$

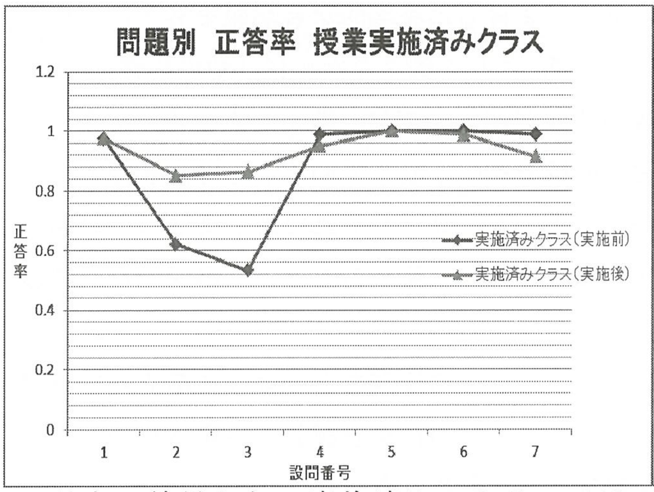
（3）実践の成果と課題

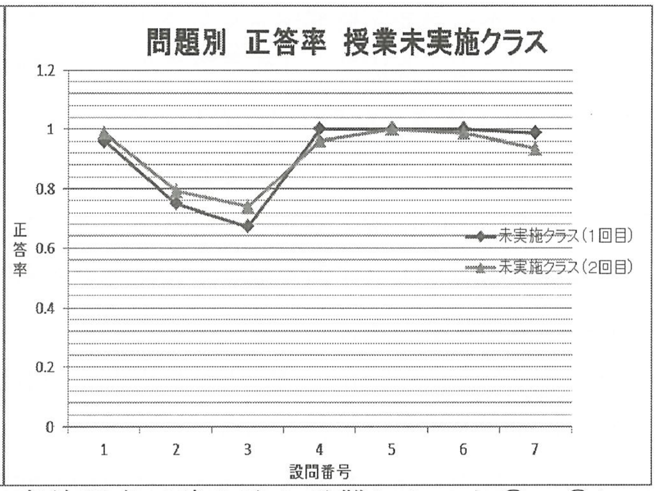
成果①　評価に対する生徒の反応

評価基準を提示することで，生徒たちは，いつもの授業以上に高度で適切な表現になるよう工夫している様子がうかがえた。また，評価・返却後に改善して再提出をした生徒もいた。以上のことから，図形に対して論理的に考察し，表現できるよう，能動的にPDCAサイクル的な改善を実行する生徒を育成することができたと言える。

成果②　結び目を教材とした実践の効果

本実践の効果を測るため，1年生4クラス中2クラスで先行して実践し，未実施クラスとの比較を行った結果，以下のようになった。効果測定は事前調査と同じ内容（設問の順番は入替）である。





以上の結果から，実施済みのクラスでは，事前調査で読み取りが難しかった②，③において，正答率が上昇していることが確認できる。未実施クラスでは大きな変化は見られない。本実践の他に異なる授業は行っておらず，本実践の効果であると言える。このように，結び目を教材とすることで，空間図形を読み取る力を伸ばせる可能性があると考えられる。

課題①　評価基準の妥当性

課題②について，A評価の「効果的な複数の図表現」で，こちら（教師）側はパラパラマンガのように連続的に移動するように描かれた図を期待していたのだが，生徒の中には投影図で表現しているものがあった。通常の投影図はあまり適切ではないと判断していたが，側面図も用いている場合はその図形の特徴をとらえているのでA評価とした。また，直方体や正四面体の一部であるという見方をした生徒もいた。この場合，1つの図表現でも優れているものもあった。あらかじめの予想を超えるものに対して，評価基準の妥当性の難しさを感じた。

課題②　結び目教材の開発

成果②でも述べたように，結びの目を教材とした実践には大きな可能性があると考えられる。しかしながら，その実践例は少なく，また中学生の学習範囲で行える内容も多くはない。よって，今後の課題は，「体系的に実践できる教材を開発すること」である。